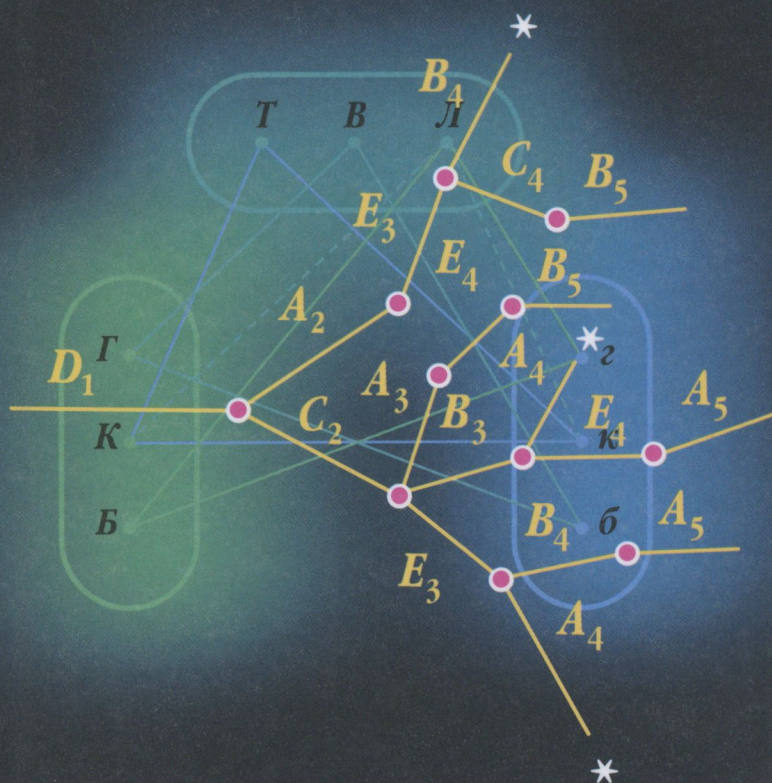




ВЫСШЕЕ
ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

О. В. Кузьмин

Комбинаторные методы решения логических задач



дрофа

Высшее
педагогическое
образование

О. В. Кузьмин

Комбинаторные методы решения логических задач

Учебное пособие

Рекомендовано учебно-методическим
объединением по классическому
университетскому образованию
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям
и специальностям в области
математики



ДРОФА
Москва • 2006

УДК 372.167.1:519.1
ББК 22.176я72
К89

Кузьмин, О. В.

К89 Комбинаторные методы решения логических задач : учеб. пособие /
О. В. Кузьмин. — М. : Дрофа, 2006. — 187, [5] с. : ил.
ISBN 5-7107-8579-2

В учебном пособии изложены основные понятия и сведения теории конечных множеств с элементами теории бинарных отношений и соответствий, а также методы решения логических задач. Рассмотрены методы: кругов Эйлера, с использованием графов и таблиц, перебора предположений об истинности, выбора стратегии и др.; задачи: турнирные, о взвешивании, о переливании. Представлены примеры решений и упражнения для самостоятельного решения с ответами.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям в области математики педагогических университетов и институтов, а также других высших учебных заведений.

Может быть полезно учащимся математических классов и учителям.

УДК 372.167.1:519.1
ББК 22.176я72



ISBN 5-7107-8579-2

© ООО «Дрофа», 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу настоящего учебного пособия положен материал курса лекций и практических занятий, которые на протяжении ряда лет читались и велись автором в Институте математики и экономики Иркутского государственного университета в рамках спецкурсов для студентов специальности «Математика». Отдельные параграфы излагались при чтении спецкурсов и проведении факультативов для учителей и учащихся математических классов школ г. Иркутска и Иркутской области.

Данное пособие является логическим продолжением книги автора по комбинаторике¹. Но, в отличие от последней, где основным является *подсчет* числа тех или иных из возможных конфигураций или подмножеств с заданными свойствами, здесь мы должны фактически либо *построить* все множество или его конкретные подмножества (в т. ч. одноэлементные), либо *восстановить* множество с требуемыми свойствами по его заданным подмножествам.

Главная цель учебного пособия состоит в изложении основных понятий и сведений теории конечных множеств с элементами теории бинарных отношений и соответствий и методов решения задач логического характера, что дает в руки читателей орудие, применимое к наукам о поведении (кибернетике, теории информации, теории кодирования, теории систем, теории игр), к естественным наукам (физике, химии, биологии) и к различным разделам математики (теории представлений групп, теории неассоциативных алгебр, конечным геометриям, комбинаторной геометрии).

Основной задачей этого учебного пособия является ознакомление студентов и учащихся с теоретическими основами решения задач логического характера. Вместе с тем достаточно большое внимание уделяется вопросам применения этих, по сути комбинаторных, подходов к решению некоторых задач алгебры, анализа и геометрии.

Чтобы избежать возможных разночтений, отметим, что в данной книге под термином *задача логического характера* мы понима-

¹ Кузьмин О. В. Перечислительная комбинаторика: Учеб. пособие. — М.: Дрофа, 2005.

ем более широкий круг задач, чем те, которые принято называть логическими. В первую очередь это задачи, которые могут быть связаны с теорией конечных множеств, одни непосредственно, другие — косвенно. Это также задачи, связанные с определенным образом действий: можно ли и каким путем получить такой-то результат? И, разумеется, к задачам логического характера относим те, в которых принципиально важны логические связи между предложениями.

Учебный материал представлен в пяти главах.

В *главе 1* приведены основные сведения о конечных множествах и операциях над ними; дан, пожалуй, один из наиболее известных методов решения логических задач — *метод кругов Эйлера* — геометрический аналог метода включения и исключения. Рассмотрен ряд задач, решение которых сводится к рассмотрению линейно и циклически упорядоченных подмножеств конечных множеств.

Глава 2 посвящена изложению понятий теории бинарных отношений и соответствий; рассмотрены два важнейших метода с использованием графов и составления таблиц, решения задач логического характера на установление соответствия между элементами множеств.

В *главе 3* рассматриваются некоторые задачи логического характера, для которых принципиально важны логические связи между высказываниями, принадлежащими одному из двух или трех множеств каждое. Чаще всего это удается сделать путем организованного тем или иным образом перебора предположений об истинности одной части высказываний.

Глава 4 содержит изложение некоторых способов решения одного типа задач на установление отношений на множестве — так называемых *турнирных задач*. Здесь же рассмотрены два класса задач, связанных с выбором стратегии, т. е. определенного образа действий: можно ли и каким путем получить тот или иной результат?

В *главе 5* обсуждаются различные ситуации, связанные либо с выделением одного или нескольких элементов мультимножества (так называемые *задачи о взвешивании*), либо с разбиениями на подмножества заданного объема (*задачи о переливании*).

Следует отметить, что методы, обсуждаемые в главах 2, 4, 5, важны и сами по себе, поскольку они находят широкое применение не только при решении логических задач, но и во многих других разделах современной математики.

Изложение материала построено на систематическом использовании теоретико-множественных понятий. Решения конкретных задач служат прежде всего иллюстрациями основных методов. Для большей наглядности задачи часто рассматриваются не в максимальной общности, причем в ряде случаев для решения одной и той же по сути задачи в различных главах применяются различные методы. Сравнение по сложности решения одной и той же задачи при различных подходах поможет читателю выработать умение правильно использовать предлагаемый аппарат в каждой конкретной ситуации.

Для закрепления теоретического материала в конце каждого параграфа помещены задачи и упражнения.

За последние годы комбинаторные приемы и методы решения логических задач развились в столь обширный самостоятельный раздел дискретной математики, что невозможно изложить все его основные направления в одной книге ограниченного объема. По этой же причине очень трудно очертить круг вопросов, которые должны входить в учебное пособие для студентов-математиков и информатиков. Еще труднее сделать это для учащихся специализированных классов гимназий и лицеев. Очевидно, что в содержании настоящей книги отражены взгляды автора.

Терминология данного раздела дискретной математики в основном установилась. Однако наряду с общепринятыми терминами и обозначениями иногда используются и менее распространенные. При этом предпочтение отдается терминам, употребляемым в отечественной литературе.

При пользовании данным пособием нужно иметь в виду, что содержание глав 1—3, за исключением п. 2.1, соответствует программе факультативных занятий по математике 10 классов средней школы. Главы 1—3 и частично 5 могут служить основой спецкурса для учащихся физико-математического профиля. Для студентов рекомендуются главы 1—3, 5; материал главы 4 или ее части, в зависимости от состава аудитории, может либо присоединяться к указанным курсам, либо служить первоначальным источником для курсовых работ. Кроме того, параграфы 2.3 и 4.3 могут оказать существенную помощь при факультативной или индивидуальной подготовке к различным математическим олимпиадам и конкурсам.

На различных стадиях работы над книгой автор пользовался советами и замечаниями, высказанными коллегами. Всем им автор выражает искреннее признание.

Автор от души благодарит рецензентов — заведующего кафедрой математического анализа Московского государственного областного университета, члена-корреспондента РАО, доктора педагогических наук, профессора Г. Л. Луканкина и декана факультета прикладной механики Московского авиационного института (Государственного технического университета), доктора физико-математических наук, профессора А. Г. Горшкова.

§ 1.1. Конечные множества и операции над ними

Множество есть совокупность объединенных по некоторым признакам различных объектов, называемых элементами множества.

Если x является *элементом* множества X (или x принадлежит X), то применяют запись $x \in X$; в противном случае пишут $x \notin X$. Два множества X и Y равны, т. е. $X = Y$, если они состоят из одних и тех же элементов. Если множества X и Y не равны, то применяют запись $X \neq Y$.

Множество X считается определенным, если заданы все его элементы $x \in X$. При этом элементы могут быть указаны либо с помощью некоторого общего признака, либо с помощью некоторого списка, где все они перечислены. Первый способ называют *описанием* множества. Этому способу задания множества X отвечает запись следующего вида:

$$X = \{x: x \text{ обладает свойством } P(x)\}.$$

Пример 1.1. Множество четных чисел M может быть задано следующим образом: $M = \{i: i \text{ — целое число, делящееся на } 2\}$.

Второй способ называется *перечислением* множества. Он возможен лишь, если множество состоит из конечного числа элементов. Множество, содержащее конечное число элементов, называется *конечным*; в противном случае множество называется *бесконечным*. Далее, за редким исключением, мы будем иметь дело лишь с конечными множествами.

Основной характеристикой конечного множества является число его элементов. Число элементов (*мощность*) конечного множества X обозначаем $n(X)$. Множество, состоящее из n элементов, называется *n -множеством*. Для описания n -множества X обычно применяется запись $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где порядок элементов в фигурных скобках (если это не оговорено особо) несуществен и определяется соображениями наглядности. Так, в записи множества

первых n натуральных чисел $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ удобно располагать числа в возрастающем порядке, хотя при этом надо иметь в виду, что, например, $N_3 = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{3, 1, 2\}$.

Если каждый элемент x множества Y , $x \in Y$, в то же время является элементом множества X , $x \in X$, то Y называется *подмножеством* множества X . Определение подмножества поясняется на рисунке 1.1, а: меньший круг, изображающий множество Y , расположен внутри большего круга, изображающего множество X . Такие изображения называются *кругами Эйлера*¹ или *диаграммами Венна*².

Для обозначения того факта, что Y является подмножеством X , используется знак *включения* \subseteq и применяется запись $Y \subseteq X$.

Включение обладает свойствами:

*рефлексивности*³: $X \subseteq X$;

*транзитивности*⁴: если $Y \subseteq X$ и $X \subseteq Z$, то $Y \subseteq Z$;

антисимметричности: если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

Если $Y \subseteq X$, $Y \neq X$, то пишем: $Y \subset X$, и Y называется *собственным подмножеством*.

Очевидно, что если $n(X) = n$ и $n(Y) = m$, то из $Y \subseteq X$ следует $m \leq n$, а из $Y \subset X$ вытекает $m < n$.

Множество, содержащее все возможные элементы, называется *универсальным* и обозначается U . Считают, что любое множество является подмножеством универсального множества.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается \emptyset . Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества и $n(\emptyset) = 0$.

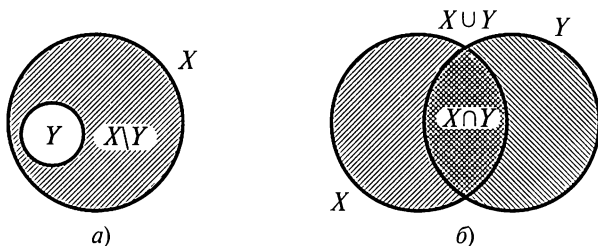


Рис. 1.1

¹ Эйлер Леонард (1707—1783) — швейцарский математик, механик и физик.

² Венн Джон (1834—1923) — английский математик и логик.

³ *Reflectio* (лат.) — отражение.

⁴ *Transitus* (лат.) — переход.

Для каждой пары множеств X и Y можно определить операцию *объединения* множеств:

$$X \cup Y = \{x: x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Пример 1.2. Если $X = \{0, 2, 4, 6\}$ и $Y = \{0, 1, 6, 9\}$, то $X \cup Y = \{0, 1, 2, 4, 6, 9\}$.

Определение объединения поясняется на рисунке 1.1, б: левый круг изображает множество X , правый круг — множество Y , вся заштрихованная область — объединение $X \cup Y$.

Очевидно, что объединение обладает свойствами

*коммутативности*¹: $X \cup Y = Y \cup X$,

и *ассоциативности*²: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$.

Это позволяет записывать без скобок объединение любого конечного количества множеств:

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = \{x: x \in X_1 \text{ или } \dots \text{ или } x \in X_k\}.$$

Для каждой пары множеств X и Y можно определить операцию *пересечения* множеств:

$$X \cap Y = \{x: x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

Пример 1.3. Если $X = \{0, 2, 4, 6\}$ и $Y = \{0, 1, 6, 8, 9\}$, то $X \cap Y = \{0, 6\}$.

Определение пересечения поясняется на рисунке 1.1, б: левый круг изображает множество X , правый круг — множество Y , дважды заштрихованная общая часть кругов X и Y — пересечение $X \cap Y$.

Если X и Y не имеют общих элементов, то $X \cap Y = \emptyset$, а множества X и Y называются *непересекающимися*. Из определения следует, что пересечение обладает свойствами

коммутативности: $X \cap Y = Y \cap X$,

и *ассоциативности*: $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.

Это позволяет записывать без скобок и пересечение любого конечного количества множеств:

$$X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_k = \{x: x \in X_1 \text{ и } \dots \text{ и } x \in X_k\}.$$

Для любых множеств X , Y и Z имеет место следующая теорема.

¹ *Commutara* (лат.) — перемещать.

² *Association* (лат.) — соединение.

■ **Теорема 1.1.** Операции объединения и пересечения связаны законами *дистрибутивности*¹:

$$\begin{aligned} X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z), \\ X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Доказательство. Докажем первое из равенств (1.1). Если $x \in X \cap (Y \cup Z)$, то $x \in X$ и одновременно или $x \in Y$, или $x \in Z$. Следовательно, либо $x \in X$ и одновременно $x \in Y$, либо $x \in X$ и одновременно $x \in Z$. Таким образом, $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Отсюда следует, что $X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Пусть теперь $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Тогда или $x \in X$ и одновременно $x \in Y$, или $x \in X$ и одновременно $x \in Z$. Отсюда вытекает, что $x \in X \cap (Y \cup Z)$. Значит, $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$, и первый закон дистрибутивности доказан. Второе из равенств (1.1) доказывается аналогично.

Для каждой пары множеств X и Y можно определить операцию *разности* множеств:

$$X \setminus Y = \{x: x \in X \text{ и } x \notin Y\}.$$

Пример 1.4. Пусть $X = \{0, 1, 6\}$ и $Y = \{1, 6, 7, 8\}$, тогда $X \setminus Y = \{0\}$.

Определение разности поясняется рисунком 1.1, б, где левый круг изображает множество X , правый круг — множество Y , часть левого круга, заштрихованная однократно, — разность $X \setminus Y$.

Из определения разности следует, что $(X \setminus Y) \cup (X \cap Y) = X$, так как для любого $x \in X$ справедливо, что либо $x \in X$, но $x \notin Y$, либо $x \in X$ и $x \in Y$.

Дополнение \bar{Y} множества $Y \subseteq X$ до множества X определяется равенством

$$\bar{Y} = X \setminus Y.$$

Пример 1.5. Пусть $X = \{1, 2, 5, 7, 9\}$ и $Y = \{2, 5, 9\}$, тогда $\bar{Y} = \{1, 7\}$.

Определение дополнения поясняется рисунком 1.1, б: заштрихованная часть внешнего круга X — дополнение $\bar{Y} = X \setminus Y$.

¹ *Distributus (лат.)* — распределенный.

Связь между операциями объединения, пересечения и дополнения выражает следующая теорема.

■ **Теорема 1.2** (законы де Моргана¹). Если X и Y — подмножества некоторого множества V , то

$$\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y}, \quad \overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}. \quad (1.2)$$

Доказательство. Докажем первое из равенств (1.2). Если $x \in \overline{X \cup Y}$, то по определению дополнения $x \notin (X \cup Y)$. По определению объединения следует, что $x \notin X$ и $x \notin Y$, т. е. $x \in \bar{X}$ и $x \in \bar{Y}$. По определению пересечения, это означает, что $x \in \bar{X} \cap \bar{Y}$. Таким образом, $\overline{X \cup Y} \subseteq \bar{X} \cap \bar{Y}$.

Обратно, если $x \in \bar{X} \cap \bar{Y}$, то $x \in \bar{X}$ и $x \in \bar{Y}$, т. е. $x \notin X$ и $x \notin Y$. Отсюда следует, что $x \notin (X \cup Y)$, т. е. $x \in \overline{X \cup Y}$. Таким образом, $\bar{X} \cap \bar{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$. Из двух включений следует первый закон де Моргана. Второе из равенств (1.2) доказывается аналогично.

Доказательство поясняется рисунком 1.2: заштрихованная хотя бы один раз область на нижней части рисунка изображает объединение $\bar{X} \cup \bar{Y}$, а дважды заштрихованная — пересечение $\bar{X} \cap \bar{Y}$ дополнений множеств X и Y .

Теорема 1.2 позволяет при необходимости заменять операцию объединения множеств операцией пересечения и наоборот. Иногда это бывает очень удобно.

Назовем (r_1, r_2, \dots, r_k) — *разбиением* n -множества X упорядоченный набор X_1, X_2, \dots, X_k подмножеств (блоков) X , таких, что $X_i \cap X_j = \emptyset$, если $i \neq j$ и $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = X$, причем $n(X_1) = r_1, \dots, n(X_k) = r_k$. Числа r_i неотрицательны и удовлетворяют соотношению $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

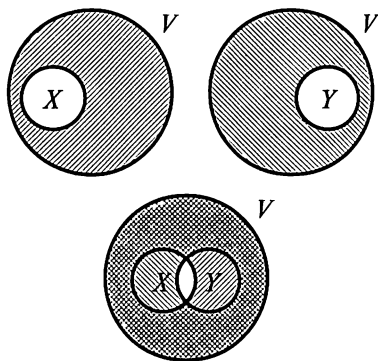


Рис. 1.2

Пример 1.6. Множества $\{1, 4\}$, $\{7, 2, 3, 9, 5, 6\}$ и $\{8\}$ представ-

¹ Морган Огастес де (1806—1871) — шотландский математик и логик.

ляют собой блоки одного из возможных $(2, 6, 1)$ -разбиений 9-множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

С понятием r -разбиения множества тесно связано еще одно из основных правил комбинаторики.

Предположим, что требуется подсчитать число комбинаций, удовлетворяющих некоторым условиям. Если все комбинации удастся разбить на несколько классов, таких, что каждая комбинация входит в один и только один класс, то общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах. Это утверждение, принимаемое в качестве аксиомы, в комбинаторике называют *общим правилом суммы* для конечного семейства множеств.

Для случая двух классов имеем *правило суммы*.

Если множество A есть m -множество, а множество B — n -множество, причем эти множества не имеют общих элементов и $m + n = r$, то их объединение $A \cup B$ есть r -множество.

Пусть заданы множества X_1, X_2, \dots, X_k . *Декартовым¹ произведением* множеств X_1, X_2, \dots, X_k называют множество всех упорядоченных совокупностей вида (x_1, x_2, \dots, x_k) , где $x_i \in X_i$ и $1 \leq i \leq k$, т. е.

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : x_i \in X_i \text{ и } 1 \leq i \leq k\}.$$

Декартово произведение $X \times X \times \dots \times X$ с m сомножителями называют m -й *декартовой степенью* множества X и обозначают $X^{(m)}$.

Упорядоченную совокупность (x_1, x_2, \dots, x_k) называют *кортежем² длины k* , составленным из элементов множеств X_1, X_2, \dots, X_k . Элементы x_1, x_2, \dots, x_k называют *компонентами* или *координатами* кортежа. Величина x_i называется *значением i -й координаты* кортежа. В отличие от элементов k -множества, значения координат кортежа могут совпадать, и порядок расположения различных значений координат существен. Кортеж длины k называют также *k -последовательностью* или *k -вектором*. Два кортежа называют *равными* в том и только в том случае, когда они имеют одинаковую длину, а на соответствующих местах стоят одни и те же элементы.

Пример 1.7. Если $X_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $X_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, то декартово произведение $X_1 \times X_2 = \{(a, 1), (a, 2), \dots, (h, 8)\}$

¹ Декарт Рене (1596—1650) — французский математик, физик, философ и физиолог.

² *Cortège* (фр.) — кортеж, торжественное шествие.

представляет собой систему обозначений полей шахматной доски, которая используется в алгебраической шахматной нотации.

С понятием декартова произведения множеств связано одно из основных правил комбинаторики.

Предположим, что требуется подсчитать число комбинаций, удовлетворяющих некоторым условиям. Если построение каждой такой комбинации удастся разбить на несколько последовательных независимых этапов, на каждом из которых выбираются элементы из некоторого конечного множества, то общее число комбинаций равно произведению числа способов выбора на каждом из этапов. Это утверждение, принимаемое в качестве аксиомы, в комбинаторике называют *общим правилом произведения* для конечного семейства множеств.

Для случая двух множеств имеем *правило произведения*.

Если при составлении пары из двух элементов известно, что первый элемент принадлежит m -множеству A , а второй — n -множеству B , тогда пара этих элементов может быть составлена mn способами.

В некоторых приложениях более естественным, чем понятие множества, является понятие мультимножества. *Мультимножество* есть совокупность не обязательно различных элементов; его можно считать множеством, в котором каждому элементу поставлено в соответствие целое неотрицательное число, называемое его *кратностью*.

Мультимножество, состоящее из элементов n различных типов, будем называть (n)-*множеством*.

Для описания мультимножества Y применяют запись

$$Y = \{k_1 * y_1, k_2 * y_2, \dots, k_n * y_n\},$$

где k_i — кратность элемента i -го типа.

Пример 1.8. Мультимножество $A = \{2 * a, 3 * b, 1 * c\}$ есть (3)-множество, содержащее элемент a кратности 2, элемент b кратности 3 и элемент c кратности 1, то есть $A = \{a, a, b, b, b, c\}$. *Порядок элементов мультимножества не существует:*

$$\{a, a, b, b, b, c\} = \{b, a, b, a, c, b\} = \dots,$$

существенна только кратность каждого элемента:

$$\{a, a, b, b, b, c\} \neq \{a, b, c\},$$

в отличие от равенства *множеств*

$$\{a, a, b, b, b, c\} = \{a, b, c\}.$$

Если в некотором (n) -множестве кратность каждого элемента равна единице, то очевидно, что оно тождественно n -множеству.

Пусть A, B — два мультимножества. Будем говорить, что A есть *подмножество* B , $A \subseteq B$, если кратность каждого элемента в A не больше кратности этого элемента в B . Пусть X есть (n) -множество, состоящее из элементов x_1, x_2, \dots, x_n с кратностями k_1, k_2, \dots, k_n . Из общего правила суммы следует, что $n(X) = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Каждому подмножеству $A \subseteq X$ однозначно соответствует кортеж

$$(m_1, m_2, \dots, m_n), 0 \leq m_1 \leq k_1, \dots, 0 \leq m_n \leq k_n,$$

где m_i обозначает кратность элемента x_i в A . Из общего правила произведения следует, что число всех подмножеств (n) -множества X равно

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1),$$

а число всех подмножеств n -множества ($k_1 = \dots = k_n = 1$) равно 2^n .

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- 1.1. Верно ли, что $\{a, b\} \in \{\{a, b, c\}, \{a, c\}, a, b\}$? Ответ обоснуйте.
- 1.2. Приведите пример множества, которое является своим собственным элементом.
- 1.3. Приведите пример таких множеств A, B и C , что $A \in B, B \in C$, но $A \notin C$.
- 1.4. Пусть A — множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, а $B = \{0, 2\}$. Найдите $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.
- 1.5. Пусть A — множество значений функции

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

B — множество корней уравнения $x(x-1)(x+2) = 0$. Найдите $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

- 1.6. Пусть A — произвольное множество. Что представляют собой следующие множества: $A \cap \emptyset, A \cup \emptyset, A \setminus \emptyset, A \setminus A, \emptyset \setminus A$?
- 1.7. Докажите следующие равенства:
 - 1) $(A \cap B) \cup A = A$;
 - 2) $A \cap (A \cup B) = A$;
 - 3) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
- 1.8. Докажите следующие равенства:
 - 1) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$;
 - 2) $\overline{A \cap (B \cap C)} \cap (\bar{A} \cap B) \cap (\bar{A} \cap C) = \emptyset$;
 - 3) $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$.

- 1.9. Докажите следующие включения:
 1) $A \cup B \cup C \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \supseteq A \cap B \cap C$;
 3) $A \cup B \supseteq (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.
- 1.10. Пусть множества A и B таковы, что $A \supset B$. Упростите выражения:
 1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup \bar{B}$; 4) $\bar{A} \cap B$.
- 1.11. Найдите пересечения множеств:
 $A = \{1; 4; 7; \dots; 898\}$, $B = \{1; 5; 9; \dots; 897\}$, $C = \{1; 6; 11; \dots; 896\}$.
- 1.12. Найдите множества A и B , если
 $A \cap B = \{1; 2; 3\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
- 1.13. Известно, что $A \cap B = \{1; 2\}$, $A \cap C = \{2; 5\}$, $A \cup B = \{1; 2; 5; 6; 9\}$, $B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$. Найдите множества A , B и C .
- 1.14. Известно, что для множеств A , B и C выполняются включения
 $A \cup B \subseteq C$, $A \cup C \subseteq B$, $B \cup C \subseteq A$.
 Следует ли отсюда, что $A = B = C$?
- 1.15. Известно, что для множеств A , B и C выполняются включения
 $A \subseteq B \cup C$, $B \subseteq A \cup C$, $C \subseteq A \cup B$.
 Докажите, что отсюда не следуют равенства $A = B = C$.
- 1.16. Все варенные красные раки мертвы, а все варенные мертвые раки красны. Следует ли отсюда, что все красные мертвые раки варены?
- 1.17. Предположим, что справедливы следующие утверждения:
 1) среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами;
 2) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.
 Следует ли отсюда, что справедливо утверждение: не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

§ 1.2. Круги Эйлера

Познакомимся с задачами, при решении которых используются круги Эйлера.

Пример 1.9. В одном бурятском улусе каждый житель говорит или по-бурятски, или по-русски, или на обоих языках. 912 жителей села говорят по-бурятски, 653 — по-русски, причем 435 человек говорят на обоих языках. Сколько жителей в этом улусе?

Решение. Применим круги Эйлера. Через A обозначим множество жителей улуса, которые говорят по-бурятски, через B — множество жителей, которые говорят по-русски (рис. 1.3).

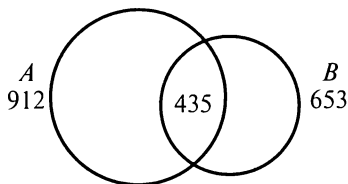


Рис. 1.3

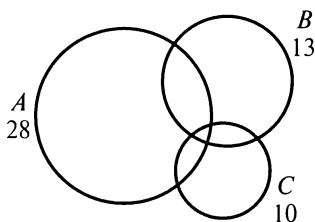


Рис. 1.4

По условию

$$n(A) = 912, n(B) = 653, n(A \cap B) = 435.$$

Нам нужно найти число элементов в объединении множеств A и B .

Прежде всего сложим числа $n(A)$ и $n(B)$. Но при этом элементы, входящие в пересечение множеств A и B , считаются дважды. Следовательно, из этой суммы нужно вычесть $n(A \cap B)$. Получаем

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \quad (1.3)$$

Подставим в формулу (1.3) значения $n(A)$, $n(B)$ и $n(A \cap B)$:

$$n(A \cup B) = 912 + 653 - 435 = 1130.$$

О т в е т. 1130.

Очевидно, формула (1.3) справедлива не только при условиях примера 1.9, но и для любых конечных множеств A и B .

Пример 1.10. Большая группа спортсменов выехала на зарубежные сборы. В группе владеют английским языком 28 человек, французским — 13, немецким — 10, английским и французским — 8, английским и немецким — 6, французским и немецким — 5, всеми тремя языками — 2, а 41 человек не владеет ни одним из трех языков. Сколько спортсменов в группе?

Решение. Обозначим множество спортсменов группы, которые владеют английским, французским или немецким языками, соответственно через A , B и C . По условию

$$\begin{aligned} n(A) &= 28, n(B) = 13, n(C) = 10, n(A \cap B) = 8, \\ n(A \cap C) &= 6, n(B \cap C) = 5, n(A \cap B \cap C) = 2. \end{aligned}$$

Сначала найдем число спортсменов, которые владеют по меньшей мере одним из трех иностранных языков, т. е. $n(A \cup B \cup C)$. Для этого применим круги Эйлера (рис. 1.4).

Подсчитаем сумму $n(A) + n(B) + n(C)$. Так как в нее каждое из чисел $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$ и $n(B \cap C)$ вошло слагаемым два раза, то от этой суммы нужно отнять сумму $n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$.

Теперь выясним, сколько раз в полученное выражение

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$

входит слагаемым число $n(A \cap B \cap C)$. Оно входит в эту сумму три раза со знаком «плюс» (в каждое из слагаемых $n(A)$, $n(B)$ и $n(C)$) и три раза со знаком «минус» (в каждое из слагаемых $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$ и $n(B \cap C)$).

Следовательно, для того чтобы «не потерять» тех спортсменов, которые входят во множество $A \cap B \cap C$, нужно еще прибавить число $n(A \cap B \cap C)$. Получаем:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \quad (1.4)$$

Тогда будем иметь:

$$n(A \cup B \cup C) = 28 + 13 + 10 - 8 - 6 - 5 + 2 = 34.$$

Значит, общее число туристов группы равно $34 + 41 = 75$.

О т в е т. 75.

Формула (1.4) справедлива для любых трех конечных множеств A , B и C .

Общую формулу для нахождения числа элементов суммы нескольких множеств дает теорема, обобщающая формулы (1.3) и (1.4).

■ **Т е о р е м а 1.3.** Для любых множеств X_1, X_2, \dots, X_n справедливо равенство

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \{n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_n)\} - \{n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + \dots + n(A_{n-1} \cap A_n)\} + \{n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + n(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)\} - \dots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n). \quad (1.5)$$

Правая часть равенства (1.5) является суммой n слагаемых, k -е по порядку слагаемое имеет вид

$$(-1)^{k-1} S_k(A_1, A_2, \dots, A_n),$$

где $S_k(A_1, A_2, \dots, A_n)$ есть сумма чисел $n(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ по всем возможным пересечениям ровно k различных множеств из множеств A_1, A_2, \dots, A_n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проводим индукцией по n . Из формулы (1.3) следует, что формула (1.5) верна для двух множеств.

Предположим, что она справедлива для $n - 1$ множества, и покажем ее справедливость для n множеств. По предположению

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= n(A_1) + n(A_2 \cup \dots \cup A_n) - n\{(A_1 \cap A_2) \cup \dots \cup (A_1 \cap A_n)\} = \\ &= n(A_1) + \{S_1(A_2, \dots, A_n) - S_2(A_2, \dots, A_n) + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1}(A_2, \dots, A_n)\} - \\ &\quad - \{S_1(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) - S_2(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) + \\ &\quad + \dots + (-1)^{n-2} S_{n-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n)\}. \end{aligned}$$

Для получения формулы (1.5) остается учесть, что

$$\begin{aligned} n(A_1) + S_1(A_2, \dots, A_n) &= S_1(A_1, \dots, A_n), \\ S_2(A_2, \dots, A_n) + S_1(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) &= S_2(A_1, \dots, A_n), \\ S_1(A_2, \dots, A_n) + S_{k-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) &= S_k(A_1, \dots, A_n), \\ S_{n-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) &= S_n(A_1, A_2, \dots, A_n). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Метод подсчета по формуле (1.5), состоящий в поочередном сложении и вычитании, называется *методом включения и исключения*¹, а формула — *формулой включений и исключений*.

В частности, при k четном последнее слагаемое в правой части формулы (1.5) имеет знак «минус» (как в формуле (1.3)), а при k нечетном — знак «плюс» (как в формуле (1.4)).

Иногда при решении задач на операции над множествами приходится рассматривать уравнения или системы уравнений.

Пример 1.11. Среди абитуриентов, выдержавших вступительные экзамены в технический университет, оценку «отлично» получили: по математике — 48 человек, по физике — 37, по литературе — 42, по математике или физике — 75, по математике или литературе — 76, по физике или литературе — 66, по всем трем предметам — 4. Сколько абитуриентов получили только одну оценку «отлично»? ровно две оценки «отлично»? по меньшей мере одну оценку «отлично»?

Решение. Применим круги Эйлера. Через M , Φ и L обозначим множества абитуриентов, сдавших на «отлично» соответственно математику, физику или литературу; эти множества по ус-

¹ Метод, основанный на использовании соотношения (1.5), известен и под другими названиями: метод решета, метод просеивания, символический метод, метод перекрестной классификации.

ловию имеют соответственно 48, 37 и 42 элемента. Общая часть всех трех множеств имеет 4 элемента. Пусть a , b , c , x , y , z — число абитуриентов, которые получили оценку «отлично» по одному или двум из трех предметов (рис. 1.5).

С помощью рисунка условия задачи можно представить следующими уравнениями:

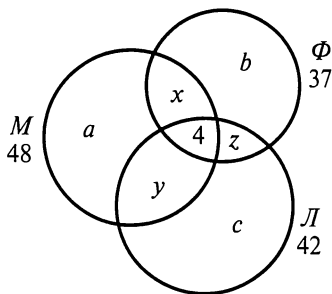


Рис. 1.5

$$\begin{cases} a + x + y = 44, \\ b + x + z = 33, \\ c + y + z = 38, \\ a + b + x + y + z = 71, \\ a + c + x + y + z = 72, \\ b + c + x + y + z = 62. \end{cases}$$

Получилась система шести уравнений с шестью неизвестными. Но нам нужны не неизвестные a , b , c , x , y , z , а суммы $a + b + c$ и $x + y + z$. Для их нахождения сложим сначала три первых, а затем три последних уравнения системы:

$$\begin{cases} a + b + c + 2(x + y + z) = 115, \\ 2(a + b + c) + 3(x + y + z) = 205. \end{cases}$$

Рассматривая последнюю систему уравнений как систему с двумя неизвестными, найдем из нее интересующие нас суммы:

$$a + b + c = 65, \quad x + y + z = 25.$$

О т в е т. 65, 25, 94.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- 1.18. Множество A состоит из 100 элементов, являющихся натуральными числами, каждое из которых делится или на 2, или на 3, причем 70 элементов из A делятся на 2 и 48 — на 3. Сколько элементов множества A делится на 6?
- 1.19. За время моей командировки в Великом Гусляре дождливых дней было 10, ветреных — 8, холодных — 6, дождливых и ветреных — 5, дождливых и холодных — 4, ветреных и холодных — 3 и, наконец, дождливых, ветреных и холодных — 1. Сколько за это время в Великом Гусляре было всего дней с плохой погодой?
- 1.20. Контрольная работа по математике в 5 классе гимназии состояла из задачи, уравнения и числового примера. Работу писали 36 учеников.

Правильно решили только задачу 2 человека, только уравнение — 4, только пример — 7. Не решили только задачу 8 человек, только уравнение — 5, только пример — 3. Остальные ученики выполнили всю работу правильно. Сколько таких учеников?

- 1.21. В норе хоббита Бильбо Беггинса пол гостиной площадью 18 м^2 покрыт тремя коврами. Площадь одного ковра — 6 м^2 , другого — 5 м^2 , третьего — 4 м^2 . Каждый два ковра перекрываются на площади 1 м^2 , причем все три ковра перекрываются на площади $0,5 \text{ м}^2$. Какова площадь части пола, не покрытой коврами?
- 1.22. Имеется 500 различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 2, 3, 5 или 7. При этом делятся: на 2, 3, 5, 7 соответственно 320, 206, 140 и 77 чисел; на 6, 10, 14, 15, 21, 35 — соответственно 98, 69, 45, 40, 35, 21; на 30, 42, 70, 105 — 25, 18, 16 и 14 чисел соответственно. Сколько чисел из первоначальных пятисот делится на 210?
- 1.23. В отчете о работе отдела Линейного Счастья НИИЧАВО указывалось, что всего в отделе 17 сотрудников, причем 10 из них знают немецкий язык, 13 — английский и французский, 2 — немецкий, английский и французский языки. Докажите, что в этих данных имеется ошибка.
- 1.24. Занятия физического кружка посещают 20 лицеистов, а занятия математического кружка — 30. Сколько лицеистов посещают занятия по физике или по математике, если:
- 1) эти занятия происходят в одно и то же время;
 - 2) эти занятия происходят в различное время и 10 лицеистов посещают оба кружка?
- 1.25. Члены математического кружка решали две задачи. В конце занятия руководитель кружка составил четыре списка:
- 1) решивших первую задачу;
 - 2) решивших только одну задачу;
 - 3) решивших по меньшей мере одну задачу;
 - 4) решивших обе задачи.
- Какой из списков самый длинный? Могут ли два списка совпадать по составу? Если да, то какие?
- 1.26. На занятии физического кружка присутствовали 10 лицеистов. Руководитель поинтересовался, выписывают ли присутствующие члены кружка журналы «Квант» (K), «Техника молодежи» (T) и «Юный техник» ($Ю$). Оказалось, что 6 человек выписывают K , 5 — T , 5 — $Ю$, 3 — K и T , 3 — K и $Ю$, 2 — T и $Ю$, а один человек не выписывает ни одного из трех журналов. Сколько членов кружка выписывают: только один журнал; только два; все три журнала?
- 1.27. За границу поехала группа туристов из 100 человек. 10 из них не знали ни немецкого, ни французского языков, 75 знали немецкий язык, 83 человека знали французский. Сколько туристов владели обоими иностранными языками?
- 1.28. Инспектор группы по изучению спроса населения представил в трест столовых такой отчет.

Число опрошенных — 100 человек. Из них пьют кофе — 78 человек, пьют чай — 71 человек, пьют кофе и чай — 48 человек.

Отчет забраковали. Почему?

- 1.29. В одной семье было много детей. Семеро из них любили капусту, шестеро — морковь, пятеро — горох. Четверо любили капусту и морковь, трое — капусту и горох, двое — морковь и горох. А один охотно ел и капусту, и морковь, и горох. Сколько детей было в семье?
- 1.30. Сколько из первых 100 натуральных чисел не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5?
- 1.31. На школьной химической олимпиаде присутствовал 21 человек, на физической — 26 человек, на математической — 29 человек. И в химической, и в математической олимпиадах участвовали 14 человек; и в физической, и в математической — 15 человек; и в физической, и в химической — 13 человек; во всех трех олимпиадах приняли участие 8 человек. Сколько всего школьников участвовали хотя бы в одной из трех олимпиад?
- 1.32. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают факультатив по комбинаторике, 11 — по логике, 10 учащихся не посещают ни один из этих факультативов.
- 1) Сколько учащихся посещают и комбинаторику, и логику?
- 2) Сколько учащихся посещают только комбинаторику?
- 1.33. В библиотеке лица n книг. Каждый читатель библиотеки прочитал по крайней мере одну книгу из этой библиотеки. О любых k ($1 \leq k \leq n$) книгах из библиотеки можно сказать, сколько читателей прочитали все эти книги. Сколько читателей в библиотеке лица?

§ 1.3. Упорядоченные множества

Слово «порядок» часто употребляют и в обыденной речи и в математике. Мы говорим о порядке слов в предложении, о порядке выполнения действий в задаче, о порядковом номере дома на некоторой улице. При этом в слово «порядок» вкладывают такой смысл: оно означает, какой элемент того или иного множества за каким следует (или какой элемент какому предшествует).

Если для некоторого множества M установлен порядок его элементов, то говорят, что множество M упорядочено. Ясно, что если множество M состоит из конечного числа элементов и упорядочено, то все элементы можно занумеровать и изобразить точками числовой прямой, расположенными в определенном порядке.

Рассмотрим класс логических задач с конечными множествами, решения которых приводят к необходимости линейно упорядочить эти множества, т. е. установить на них отношение строгого порядка (см. § 2.2).

Пример 1.12. В очереди за билетами в кино стоят лицеисты Леня, Дима, Володя, Сережа и Олег. Известно, что:

- 1) Леня купит билет раньше, чем Дима, но позже Олега;
- 2) Володя и Олег не стоят рядом;
- 3) Сережа не находится рядом ни с Олегом, ни с Леной, ни с Володей.

Кто за кем стоит?

Решение. По условию в очереди за билетами три мальчика стоят в следующем порядке: Олег, Леня, Дима (рис. 1.6).

Теперь нужно установить места Сережи и Володи в очереди.

Но Сережа не находится рядом ни с Олегом, ни с Леной, ни с Володей. Это возможно лишь в случае, когда Сережа стоит за Димой, а остальные мальчики стоят перед Димой.

Остается установить место Володи в очереди. По условию Володя не может стоять рядом ни с Олегом, ни с Сережей. Значит, Володя стоит между Леной и Димой (рис. 1.7).

Ответ. Мальчики стоят в очереди в следующем порядке: Олег, Леня, Володя, Дима, Сережа.

В некоторых из задач может встретиться ситуация, когда элементы множества могут быть упорядочены не единственным образом.

Пример 1.13. В пяти корзинах $A, B, B, Г$ и $Д$ лежат яблоки пяти разных сортов. В каждой из корзин A и $Б$ находятся яблоки 3-го и 4-го сорта, в корзине $В$ — 2-го и 3-го, в корзине $Г$ — 4-го и 5-го, в корзине $Д$ — 1-го и 5-го. Занумеруйте корзины так, чтобы в корзине № 1 имелись яблоки 1-го сорта (по меньшей мере одно), в корзине № 2 — яблоки 2-го сорта и т. д.

Решение. Изобразим множество корзин $\{A, Б, В, Г, Д\}$ и множество их номеров $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. В каждом из этих множеств по пять элементов; обозначим их точками (рис. 1.8).

Установим соответствие между этими двумя множествами так, чтобы условия задачи выполнялись. Будем соединять соответствующие элементы сплошными линиями, а не соответствующие — не соединять.

Так как яблоки первого сорта лежат только в корзине $Д$, то именно этой корзине и нужно дать № 1; проведем сплошную

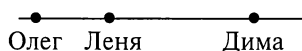


Рис. 1.6

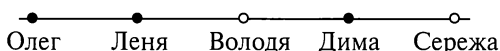


Рис. 1.7

линию между точками D и 1. Далее, № 2 можно присвоить только корзине B , а после этого № 5 — лишь корзине $Г$. Наконец, № 3 и 4 дадим корзинам A и B (в любом порядке).

О т в е т. Корзины, начиная с № 1, расположились последовательно в порядке $D, B, A, B, Г$ или в порядке $D, B, Б, A, Г$.

Перейдем теперь к задачам на расположение элементов на окружности.

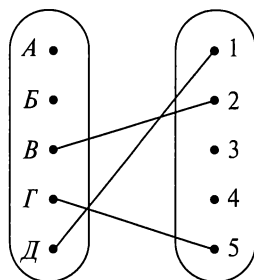


Рис. 1.8

Пример 1.14. На улице, около лица, став в кружок, беседуют четыре девочки: Катя, Валя, Лена и Ира.

1) Девочка в зеленом платье (не Катя и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Ирой.

2) Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей.

Какого цвета платье у каждой из девочек?

Р е ш е н и е. Обозначим места расположения девочек, занумеровав их по часовой стрелке (рис. 1.9).

Предположим, что под № 1 стоит девочка в зеленом платье. По условию это не Катя, не Валя и не Ира. Значит, в зеленом платье — Лена.

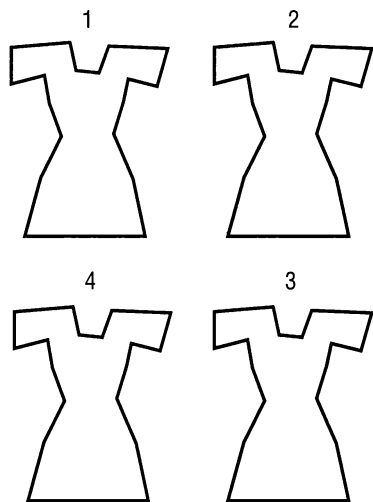


Рис. 1.9



Рис. 1.10

Известно, что Лена стоит между девочкой в голубом платье и Ирой. Будем считать, что под № 4 находится девочка в белом платье (это не Ира), но тогда под № 1 должна стоять либо Валя, либо девочка в розовом платье. Это противоречит тому, что под № 1 стоит Лена, одетая в зеленое платье. Значит, девочка в белом платье стоит под № 3. Тогда девочкой в голубом платье должна быть Валя, а Ира должна быть в розовом платье.

Теперь ясно, что Катя — в белом платье (рис. 1.10).

В ряде логических задач приходится иметь дело с упорядоченными парами. Рассмотрим несколько таких задач.

Пример 1.15. Как-то раз четыре товарища (Валентин, Николай, Владимир и Алексей) пошли со своими женами на танцы. Во время первого танца каждый из них танцевал не со своей женой. Лена танцевала с Валентином, а Аня — с мужем Наташи. Оля танцевала с мужем Ани, Николай — с женой Владимира, а Владимир — с женой Валентина. Кто на ком женат? Кто с кем танцевал?

Решение. Валентин не муж Лены (Лена танцевала не со своим мужем), не муж Наташи (Аня танцевала с мужем Наташи), не муж Ани (с мужем Ани танцевала Оля). Значит, Валентин — муж Оли.

Так как Владимир танцевал с женой Валентина, то Владимир танцевал с Олей. Но Оля танцевала с мужем Ани. Значит, Владимир — муж Ани. Николай танцевал с женой Владимира. Значит, Николай танцевал с Аней. Но Аня танцевала с мужем Наташи. Значит, Николай — муж Наташи. При этом, очевидно, Алексей — муж Лены.

Танцевальными парами были: Лена — Валентин, Аня — Николай, Оля — Владимир, Наташа — Алексей.

Следующая задача также приводит к необходимости упорядочить пары элементов двух множеств. Это упорядочение имеет особый характер.

Пример 1.16. Как-то раз четыре товарища (Петя, Боря, Алеша и Коля) пошли со своими сестрами на школьный новогодний бал. Во время первого танца каждый из них танцевал не со своей сестрой. Лена танцевала с Петей, а Светлана — с братом Наташи, Оля танцевала с братом Светланы, Боря — с сестрой Алеша, а Алеша — с сестрой Пети.

Кто чей брат и кто с кем танцевал?

Р е ш е н и е. Будем изображать в виде прямоугольников места расположения участников новогоднего бала с учетом условий задачи. Тогда получим, очевидно, четыре прямоугольника следующего вида:

- | | |
|---|--|
| 1) <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Лена танцевала с Петей
 Лена — сестра ...
 Петя — брат ... </div> | 2) <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Светлана танцевала с ...
 Светлана — сестра ...
 ... — брат Наташи </div> |
| 3) <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Оля танцевала с
 Оля — сестра ...
 ... — брат Светланы </div> | 4) <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> ... танцевала с Борей
 ... — сестра Алеши
 Боря — брат ... </div> |

Пользуясь условием задачи и логическим обоснованием отдельных положений, будем заполнять пустые места в прямоугольниках следующим образом.

Петя — не брат Лены (Лена танцевала не со своим братом), не брат Наташи (Светлана танцевала с братом Наташи), не брат Светланы (Оля танцевала с братом Светланы). Значит, Петя — брат Оли, а Оля сестра Пети. Это помечается в прямоугольниках 1 и 3.

Так как Алеша танцевал с сестрой Пети, то он танцевал с Олей (пометка в прямоугольнике 3). Но Оля танцевала с братом Светланы. Значит, Алеша — брат Светланы (пометка в прямоугольниках 2 и 3). Но Боря танцевал не с сестрой Алеши. Значит, Боря танцевал со Светланой. Но Светлана танцевала с братом Наташи. Значит, Боря — брат Наташи. Теперь ясно, что Лена — сестра Коли, а Коля танцевал с Наташей.

- | | |
|--|---|
| 1) <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Лена танцевала с Петей
 Лена — сестра Коли
 Петя — брат Оли </div> | 2) <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Светлана танцевала с Борей
 Светлана — сестра Алеши
 Боря — брат Наташи </div> |
| 3) <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Оля танцевала с Алешей
 Оля — сестра Пети
 Алеша — брат Светланы </div> | 4) <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Светлана танцевала с Борей
 Светлана — сестра Алеши
 Боря — брат Наташи </div> |

О т в е т. Петя — брат Оли, танцевал с Леной; Боря — брат Наташи, танцевал со Светланой; Алеша — брат Светланы, танцевал с Олей; Коля — брат Лены, танцевал с Наташей.

Пример 1.17. Жили четыре друга. Звали их Альберт, Карл, Дидрих и Отто. Фамилии друзей те же, что имена, однако ни у кого из них имя и фамилия не были одинаковы. Кроме того, фамилия Дидриха не была Альберт.

Требуется определить фамилию каждого из друзей, если известно, что имя мальчика, чья фамилия Отто, есть фамилия того мальчика, имя которого — фамилия Карла.

Решение. Будем обозначать имя и фамилию каждого мальчика двумя буквами в виде X_Y , где X — первая буква имени, а Y — первая буква фамилии. Из условия задачи следует, что нет мальчиков, соответствующих символам A_A , D_D , K_K , O_O , D_A . Но есть мальчик X_Y такой, что ему соответствуют мальчики Y_O и K_X . Рассмотрим возможные значения букв X и Y для трех мальчиков.

Ясно, что X не K (иначе было бы два мальчика с именем Карл), X не O (иначе было бы два мальчика с фамилией Отто).

Аналогично, Y не K и не O .

Следовательно, X и Y могут принимать только значения A и D . Но по условию задачи нет мальчика, соответствующего символу D . Значит, возможен лишь единственный вариант: $X = A$, $Y = D$.

Таким образом, мальчики с именами Альберт, Карл, Дидрих и Отто имеют фамилии соответственно: Дидрих, Альберт, Отто и Карл.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- 1.34. Восемь гномов выстроились так, что A был впереди B и B ; B — впереди K через одного; L — впереди A , но после D ; B — после E через одного; D — между B и G ; E — рядом с K , но впереди B . В каком порядке выстроились гномы?
- 1.35. В розыгрыше первенства по волейболу команда A отстала от команды B на три места, команда E опередила B , но отстала от D , команда B опередила команду G . Какое место заняла каждая из этих шести команд?
- 1.36. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на 3?
- 1.37. Ленья, Дима, Коля и Алик подсчитывали после рыбной ловли свои трофеи. В результате выяснилось следующее. Алик поймал больше, чем Коля. Ленья и Дима вместе поймали рыбы столько же, сколько поймали Коля и Алик. Ленья и Алик вместе поймали меньше рыбы, чем Дима и Коля. Как распределились между рыбаками места по количеству выловленной рыбы?
- 1.38. Аркадий, Борис, Николай и Владимир развлекались перетягиванием каната. Борис мог перетянуть Аркадия и Николая, вместе взятых. Если с одной стороны становились Борис и Аркадий, а с другой — Николай и Владимир, то ни та, ни другая пара не могла перетянуть канат на свою сторону. Но если Николай и Аркадий менялись местами, Владимир и Аркадий легко побеждали противников. Кто из них был самый сильный, кто занимал второе место, кто третье, кто самый слабый?

- 1.39. Во дворе дома на Пушкинской гусярцы Грубин, Ложкин, Погосян и Удалов играли в домино. Удалов младше, чем Ложкин. Погосян старше, чем любой из его противников. Удалов старше, чем его партнер. Грубину и Ложкину вдвоем больше лет, чем Погосяну и Удалову вместе. Кто с кем играл и как распределить данных гусярцев по возрасту?
- 1.40. Четыре подруги пришли на каток каждая со своим братом. Они разбились на пары и начали кататься. Оказалось, что в каждой паре кавалер выше дамы и никто не катается со своей сестрой. Самый высокий из компании — Юра Воробьев, следующий по росту — Андрей Егоров, потом Люся Егорова, Сережа Петров, Оля Петрова, Дима Крымов, Инна Крымова и Аня Воробьева. Кто с кем катался?
- 1.41. Однажды в Артеке за круглым столом оказалось пятеро ребят родом из Москвы, Иркутска, Тулы, Перми и Курска: Юра, Толя, Леша. Коля, Витя. Москвич сидит между курянином и Витей, иркутянин — между Юрой и Толей, а напротив него сидят пермяк и Леша. Коля никогда не был в Иркутске, а Юра не бывал в Москве и в Курске, курянин с Толей регулярно переписываются. Определите, кто из ребят где живет.
- 1.42. Был жаркий день, и четыре супружеские пары, гуляя, выпили в течение дня 44 стакана лимонада. Аня выпила два стакана, Мария — три, Софья — четыре, Дарья — пять. Андреев выпил столько же, сколько и его жена; Борисов выпил стаканов лимонада вдвое больше, чем его жена; Васильев — втрое больше своей жены, а Груздев выпил стаканов лимонада в четыре раза больше, чем его жена. Кто на ком женат?
- 1.43. Алексей Иванович, Федор Семенович, Валентин Петрович и Григорий Аркадьевич были как-то раз со своими детьми в парке культуры и отдыха. Они катались на «колесе обозрения». В кабинах «колеса» оказались вместе: Леня с Алексеем Ивановичем, Андрей с отцом Коли, Тима с отцом Андрея, Федор Семенович с сыном Валентина Петровича, Валентин Петрович с сыном Алексея Ивановича. Кто чей сын и кто с кем катался, если ни один из мальчиков не катался со своим отцом?
- 1.44. Трое юношей: Коля, Петя и Юра — влюблены в трех девушек: Таню, Зину и Галю. Но это любовь без взаимности.
- 1) Коля любит девушку, влюбленную в юношу, который любит Таню.
 - 2) Петя любит девушку, влюбленную в юношу, который любит Зину.
 - 3) Зина не любит Юру.
- Кто в кого влюблен?
- 1.45. Команды *A*, *B*, *B*, *Г* и *Д* участвовали в эстафете. До соревнований пять болельщиков высказали такие прогнозы.
- 1) Команда *Д* займет первое место, команда *B* — второе;
 - 2) команда *A* займет второе место, *Г* — четвертое;
 - 3) *B* — третье место, *Д* — пятое;
 - 4) *B* — первое место, *Г* — четвертое;
 - 5) *A* — второе, *B* — третье.

В каждом прогнозе одна часть подтвердилась, другая — нет. Какое место заняла каждая из команд?

- 1.46. Перед забегом шести спортсменов трое болельщиков высказали такие прогнозы о порядке мест, которые они займут, начиная с первого:

A, B, B, Г, Д, E;

A, B, B, E, Д, Г;

B, Д, E, A, Г, B.

Первый болельщик верно угадал три номера, но не угадал ни одной пары бегунов, которые последовательно финишировали. Второй не угадал ни одного места, третий угадал одно место. В каком порядке финишировали спортсмены?

- 1.47. За круглым столом сидели четыре студента. Филолог сидел против Козина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Волковым. Соседи Шатрова — Егоркин и физик. Какая профессия у Козина?

- 1.48. Ниф, Наф и Нуф подружились с Серым Волком. Все четверо стали заядлыми филателистами. Волк собирает фауну, один из поросят — флору, другой — спорт, третий — космос. Вся четверка собралась за столом в доме Волка. Волк сидит слева от Нафа, Ниф — справа от собирателя космоса, Нуф сидит напротив Нафа и не интересуется спортивной тематикой. Какие марки собирает Ниф?

- 1.49. На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, ромб, круг, квадрат. Цвета этих фигур — зеленый, желтый, синий, красный. В каком порядке лежат фигуры и каков цвет каждой из них, если фигура красного цвета лежит между зеленой и синей, справа от желтой фигуры лежит ромб, круг лежит правее треугольника и ромба, причем треугольник лежит не с краю, и, наконец, фигура синего цвета не лежит рядом с фигурой желтого цвета?

§ 2.1. Соответствия

*Соответствием R между множествами X и Y называется упорядоченная тройка множеств (X, Y, Γ) , где $\Gamma \subseteq X \times Y$. Множество X называется *областью отправления*, множество Y — *областью прибытия*, а подмножество Γ — *графиком* соответствия R .*

Два соответствия между множествами X и Y считаются между собой различными, если у них различны графики, или области отправления, или области прибытия.

Если множества X и Y конечны, их декартово произведение можно наглядно изобразить в виде таблицы, столбцы которой «нумеруются» элементами множества X , а строки — элементами множества Y . График соответствия между множествами X и Y при этом изображается совокупностью заштрихованных или иным образом отмеченных клеток таблицы.

Пример 2.1. Зададим график дежурств соответствием «В день недели x дежурит учащийся y » (табл. 2.1). Из таблицы видно, что в понедельник дежурят Абасов и Жданова, а во вторник — Бочкарева и Зубина.

Таблица 2.1

Учащийся	Пон.	Вт.	Ср.	Чет.	Пят.	Суб.
Абасов	✓				✓	
Бочкарева		✓				✓
Верхозин			✓			
Грудинин				✓		
Дружинина				✓		
Егранов			✓			
Жданова	✓					✓
Зубина		✓			✓	

Определение соответствия как тройки множеств (X, Y, Γ) удобно в теоретических исследованиях. Однако практически такое задание соответствий применимо лишь в случае, когда множества X и Y конечны. Если же эти множества бесконечны, декартово произведение $X \times Y$ становится необозримым, равно как и график соответствия, и приходится прибегать к иным способам описания соответствий.

Для наглядного изображения соответствий между конечными множествами применяются также *графы* (см. § 2.4). Для этого элементы каждого из множеств X и Y изображают точками на плоскости, после чего проводят стрелки от x к y , если (x, y) принадлежит графику данного соответствия.

Пример 2.2. На рисунке 2.1 изображен граф отношения «Число x делится на число y » для множеств $X = \{20, 40, 2, 14\}$ и $Y = \{4, 3, 10\}$.

Многие соответствия обозначаются специальными знаками, поставленными между элементами x и y . Например, соответствие «Прямая x параллельна прямой y » обозначают $x \parallel y$, а соответствие «Прямая x перпендикулярна прямой y » — так: $x \perp y$. Здесь \parallel и \perp — знаки для обозначения параллельности и перпендикулярности соответственно. Знаком « \cong » обозначают конгруэнтность фигур, знаком « $>$ » — соответствие «Больше» и т. д. В теории соответствий пишут xRy , чтобы обозначить, что элементы x и y находятся в соответствии R .

Пусть R — соответствие между множествами X и Y и $a \in X$. Назовем *образом* элемента a множество $R(a)$ всех $y \in Y$, таких, что aRy . *Полным прообразом* элемента $b \in Y$ при том же соответствии назовем множество $R^{-1}(b)$ элементов $x \in X$, таких, что xRb .

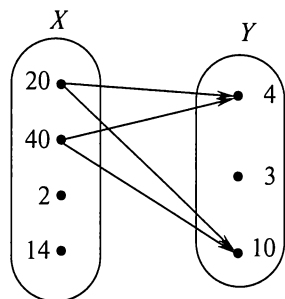


Рис. 2.1

Если множества X и Y конечны и соответствие R между ними изображено графом, то $R(a)$ состоит из концов всех стрелок, начинающихся в точке a , а $R^{-1}(b)$ — из начал всех стрелок, оканчивающихся в точке b .

Любому подмножеству A множества X соответствует его образ $R(A)$ в Y . Этот образ является объединением образов всех элементов из A , т. е.

$$R(A) = \bigcup_{a \in A} R(a).$$

Образ всего множества X при этом соответствии называют *множеством значений* соответствия R и обозначают $R(X)$. Если соответствие R задано графом, то $R(X)$ состоит из концов всех стрелок графа.

Точно так же любому подмножеству B множества Y соответствует его полный прообраз $R^{-1}(B)$ — объединение полных прообразов всех элементов из B , т. е.

$$R^{-1}(B) = \cup_{b \in B} R^{-1}(b).$$

Полный прообраз всего множества Y при соответствии R называют *областью определения* этого соответствия и обозначают $R^{-1}(Y)$. Если соответствие R задано графом, то областью его определения является множество начал всех стрелок.

Пример 2.3. Областью определения соответствия R , заданного графом на рисунке 2.2, является множество $A = \{x_1, x_2, x_3\}$, а областью значений — множество $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Если область определения соответствия R совпадает с его областью отправления X , т. е. для любого $a \in X$ найдется такое $y \in Y$, что aRy , то говорят, что соответствие R *всюду определено*.

Если область значений соответствия R совпадает с его областью прибытия, то говорят, что это соответствие *сюръективно*¹. В этом случае каждый элемент $b \in Y$ является образом какого-нибудь элемента $x \in X$.

Пример 2.4. Соответствие «Касается» между множеством X прямых и множеством Y окружностей, всюду определено и сюръективно: каждая прямая касается какой-нибудь окружности и каждой окружности касается какая-нибудь прямая.

Если соответствие задано своим графом и всюду определено, то из каждой точки множества X выходит хоть одна стрелка. Если же оно сюръективно, то каждая точка множества Y является концом какой-нибудь стрелки (рис. 2.3).

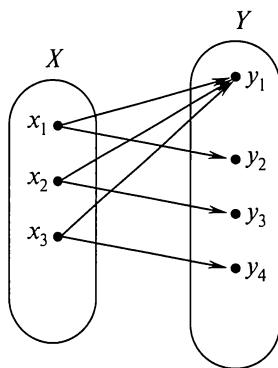


Рис. 2.2

¹ *Sur (фр.)* — на.

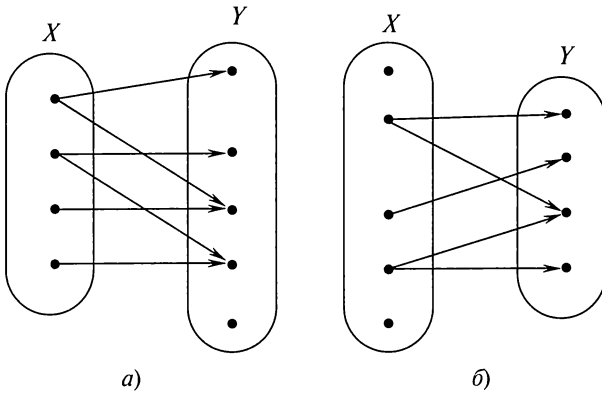


Рис. 2.3

Соответствия можно различать и по числу элементов в образах и полных прообразах элементов. Если при соответствии R образ каждого элемента $x \in X$ или пуст, или содержит лишь один элемент, то R называют *функциональным соответствием* или *отображением из X в Y* . Иными словами, соответствие R функционально, если из того, что xRy_1 и xRy_2 , можно сделать вывод: $y_1 = y_2$. Таким образом, в графе функционального соответствия нет расходящихся стрелок, он таков, как на рисунке 2.4, — из каждой точки множества не выходит ни одной стрелки или выходит одна стрелка.

Всюду определенное функциональное соответствие называют *отображением множества X в множество Y* . Таким образом, R является отображением X в Y , если для любого $x \in X$ найдется одно и только одно $y \in Y$ такое, что xRy . Этот элемент y и является образом x при отображении R , т. е. $y = R(x)$. Если отображение X в Y сюръективно, его называют *отображением множества X на множество Y* .

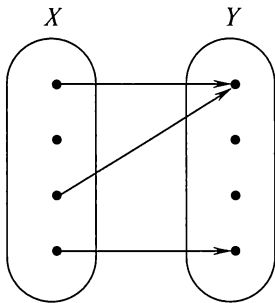


Рис. 2.4

Пример 2.5. Соответствие, сопоставляющее каждому треугольнику описанную вокруг него окружность, является отображением множества X треугольников на множество Y окружностей. В то же время такое же соответствие между множеством Z четырехугольников и множеством Y окружностей является лишь функциональным соответствием или отображением из

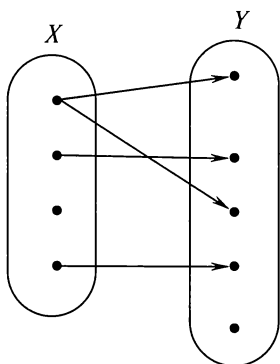


Рис. 2.5

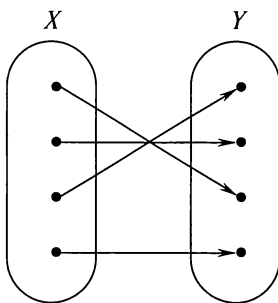


Рис. 2.6

Z в Y — есть четырехугольники, вокруг которых нельзя описать ни одной окружности, но если уж для какого-нибудь четырехугольника существует описанная окружность, то только одна. Это соответствие сюръективно.

Соответствия, при которых полный прообраз любого элемента $y \in Y$ либо пуст, либо содержит лишь один элемент называют *инъективными*¹. Для таких соответствий из $x_1 R y$ и $x_2 R y$ следует $x_1 = x_2$. Граф инъективных соответствий не может содержать стрелок, сходящихся в одной точке, т. е. таков, как на рисунке 2.5. Инъективные отображения называют *обратимыми*.

Пример 2.6. Соответствие «Сидит за» между множеством X лицеистов и множеством Y столов не является инъективным, так как за одним и тем же столом могут сидеть несколько лицеистов. А соответствие «Число x равно длине периметра треугольника y » инъективно, так как два различных числа не могут быть равны длине периметра одного и того же треугольника.

Всюду определенное, сюръективное, функциональное и инъективное соответствие называется *биективным*. Граф биективного соответствия показан на рисунке 2.6.

Соответствие S между множествами X и Y является *следствием* соответствия R между теми же множествами, если из того, что $x R y$, вытекает, что $x S y$. Это означает, что из $(x, y) \in \Gamma_R$ следует $(x, y) \in \Gamma_S$, где Γ_R и Γ_S — графики соответствий R и S . Иными словами, соответствие S является следствием соответствия R , если его график

¹ *Injectio* (лат.) — вбрасывание.

содержит график соответствия R , $\Gamma_R \subseteq \Gamma_S$. Будем писать в этом случае $R \subseteq S$.

Соответствие с пустым графиком называют *пустым соответствием*, а соответствие, графиком которого является все декартово произведение $X \times Y$, — *полным соответствием*. Очевидно, что полное соответствие является следствием любого соответствия R , а любое соответствие — следствием пустого соответствия \emptyset :

$$\emptyset \subseteq \Gamma_R \subseteq X \times Y.$$

Пусть заданы два соответствия R и S между множествами X и Y . *Объединением* соответствий называют соответствие $R \cup S$ между теми же множествами. График соответствия $R \cup S$ является объединением графиков соответствий R и S , т. е.

$$\Gamma_{R \cup S} = \Gamma_R \cup \Gamma_S.$$

Если соответствия R и S заданы графами, то для получения графа их объединения достаточно взять стрелки первого и второго графа.

Пусть заданы два соответствия R и S между множествами X и Y . Их *пересечением* называют соответствие $R \cap S$ между теми же множествами, график которого является пересечением графиков соответствий R и S , т. е.

$$\Gamma_{R \cap S} = \Gamma_R \cap \Gamma_S.$$

Если соответствия R и S заданы графами, то, чтобы получить граф их пересечения, надо взять стрелки, принадлежащие сразу обоим графам.

Соответствия R и S между множествами X и Y *несовместны*, если их пересечение — пустое соответствие \emptyset .

Пример 2.7. Несовместны соответствия «Меньше» и «Больше»: ни для каких двух x и y не могут одновременно выполняться условия $x < y$ и $x > y$. А соответствия «Не больше» и «Не меньше» совместны: если $x = y$, то оба они выполняются.

Для каждого соответствия R можно найти противоположное ему соответствие \bar{R} , т. е. такое соответствие, что $x\bar{R}y$ в том и только в том случае, когда не выполняется xRy .

Пример 2.8. Соответствию «Касаться» между прямыми и окружностями противоположно соответствие «Не касаться», а соответствию «Иметь пустое пересечение» противоположно «Иметь непустое пересечение».

Из определения противоположных соответствий видно, что их графики взаимно дополнительны в декартовом произведении $X \times Y$.

Поэтому если \bar{R} противоположно R , то R в свою очередь противоположно \bar{R} . Любые два противоположных соответствия несовместны. Обратное, однако, неверно — встречаются несовместные, но не противоположные соответствия. А если R и \bar{R} — противоположные соответствия, то для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется одно и только одно из условий: xRy , $x\bar{R}y$.

Пусть R — соответствие между множествами X и Y , Γ_R — его график, и пусть $A \subset X$ и $B \subset Y$. Назовем *сужением* R на подмножества A и B соответствие S между A и B , графиком которого является пересечение Γ_R с $A \times B$ (т. е. множество таких пар (a, b) , что $(a, b) \in \Gamma_R$, причем $a \in A$ и $b \in B$).

Иногда заданное соответствие R называют *расширением* S на X и Y . Но надо иметь в виду, что сужение R на A и B определено однозначно, а расширение не является однозначно определенным. Дело в том, что если задан график соответствия R , то его пересечение с $A \times B$ однозначно определено. Но если задан график Γ_S соответствия S , то существует много подмножеств в $X \times Y$, пересекающихся с $A \times B$ по подмножеству Γ_S .

Если R — соответствие между множествами X и Y , то *обратным* ему называется такое соответствие R^{-1} между Y и X , что $yR^{-1}x$ в том и только в том случае, когда xRy . Разумеется, соответствием, обратным R^{-1} , снова является R .

Для получения графика соответствия R^{-1} достаточно в каждой паре (x, y) графика R переставить местами x и y .

Пример 2.9. Если $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, причем

$$\Gamma_R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_2), (x_3, y_3)\},$$

то

$$\Gamma_{R^{-1}} = \{(y_1, x_1), (y_2, x_1), (y_2, x_2), (y_2, x_3), (y_3, x_3)\}.$$

Если соответствие R задано графом, то для получения графа соответствия R^{-1} достаточно поменять направления всех стрелок.

Пусть заданы три множества X , Y и Z и соответствие R между X и Y и соответствие S между Y и Z . Назовем *композицией* R и S соответствие Q между X и Z такое, что xQz в том и только в том случае, когда есть хотя одно $y \in Y$, для которого xRy и ySz . В этом случае пишут: $Q = RS$.

Это несколько громоздкое определение можно сделать более наглядным с помощью графов заданных соответствий. Пусть R и S

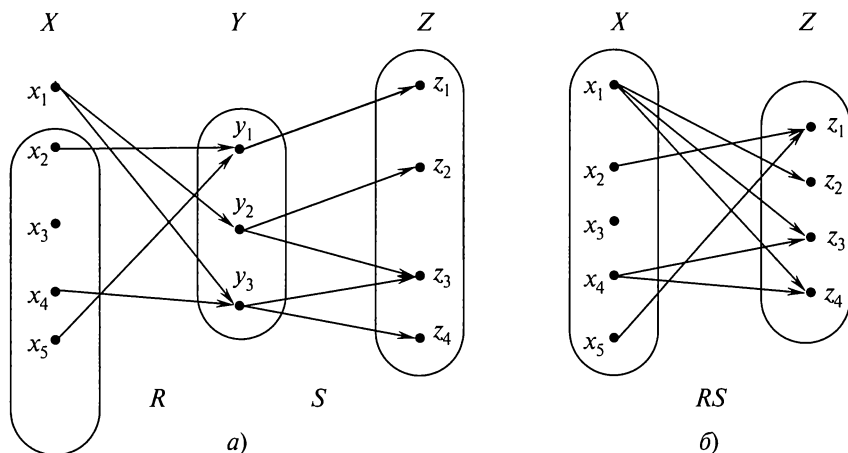


Рис. 2.7

заданы графами (рис. 2.7). Пара (x, z) принадлежит графику соответствия RS , если из точки x можно перейти в точку z , двигаясь по стрелкам заданных графов. Например, пара (x_1, z_3) принадлежит графику соответствия RS , потому что из x_1 можно сначала перейти в точку y_2 , а потом из y_2 перейти в точку z_3 . А пара (x_1, z_1) графику RS не принадлежит: из точки x_1 можно попасть лишь в точки y_2 и y_3 , а из них ни одна стрелка не ведет в точку z_1 .

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- 2.1. Постройте граф соответствия «Больше» для множеств $X = \{2, 4, 6\}$ и $Y = \{1, 3, 5\}$. Найдите образ числа 4 и полный прообраз числа 5.
- 2.2. Для множеств $X = \{25, 16, 7, 6\}$ и $Y = \{5, 2, 3, 9, 1\}$ задайте график соответствия «Делится на». Постройте граф этого соответствия. Найдите образ числа 6 и полный прообраз числа 2. Какой элемент имеет пустой прообраз? Для какого элемента полный прообраз совпадает со всем множеством X ? Найдите область определения и множество значений этого соответствия.
- 2.3. Пусть $X = \{\text{мама, папа, рама, яма}\}$ и $Y = \{\text{а, м, р, п, ф, я}\}$. Задайте график соответствия «В слово x входит буква y » и постройте граф этого соответствия. Найдите образ слова «мама» и полный прообраз буквы «м». Найдите букву с пустым прообразом.
- 2.4. Пусть X — множество учащихся в классе, Y — множество парт в том же классе. Каждому учащемуся сопоставляется парта, за которой он сидит. Что такое полный прообраз данной парты? Что такое образ множества всех учащихся?

- 2.5. Что такое полный прообраз данной окружности при соответствии «Вписан» между треугольниками и окружностями? Из скольких элементов состоит образ данного треугольника?
- 2.6. Пусть X — множество всех натуральных чисел, кроме числа 1. Обозначим через R соответствие «Делится». Является ли это соответствие: 1) отображением X в X ; 2) сюръективно ли оно; 3) инъективно ли оно; 4) функционально ли оно; 5) всюду ли оно определено? Ответьте на те же вопросы, если X — множество простых чисел.
- 2.7. Даны множества $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2\}$, Установите биективное соответствие между множествами $A \times B$ и $B \times A$.
- 2.8. Множество X состоит из всех квадратов на плоскости, а множество Y — из всех окружностей на той же плоскости. Каждому квадрату x сопоставляется вписанная в него окружность. Является ли это соответствие отображением X в Y ? Инъективно ли оно? Что является полным прообразом данной окружности? Станет ли это соответствие инъективным, если заменить X на множество Z квадратов, стороны которых параллельны осям координат?
- 2.9. Пусть X — множество мужчин, Y — множество всех людей. Является ли соответствие xRy (« x — отец y ») следствием соответствия xSy (« x — дед y »)? Является ли для тех же множеств X и Y соответствие « x — потомок y » следствием соответствия « x — сын y »?
- 2.10. Является ли соответствие «Число x делится на y » следствием соответствий: 1) « x делится на $2y$ »; 2) « $2x$ делится на y »; 3) «Сумма цифр числа x делится на y »?
- 2.11. Пусть X — множество прямых и Y — множество окружностей. Совместны ли соответствия: 1) «Касается» и «Проходит через центр»; 2) «Пересекает» и «Проходит через центр»?
- 2.12. Докажите, что если соответствие R непусто и S — следствие R , то R и S совместны.
- 2.13. Совместны ли соответствия «Параллельна» и «Перпендикулярна»? Противоположны ли они, если: 1) X и Y — множества всех прямых на плоскости; 2) X и Y — множества прямых, параллельных координатным осям?
- 2.14. Пусть X — множество прямых линий и Y — множество парабол. Найдите пересечение соответствий «Прямая проходит через вершину параболы» и «Прямая параллельна оси симметрии параболы». Является ли это пересечение: 1) всюду определенным; 2) функциональным; 3) инъективно ли оно; 4) сюръективно ли оно? Ответьте на те же вопросы для заданных соответствий.
- 2.15. Пусть R — соответствие с областью отправления X и областью прибытия Y , A — его область определения и B — множество значений. Докажите, что график R совпадает с графиком его сужения на подмножества A и B .
- 2.16. Пусть X и Y — множества натуральных чисел и R — соответствие «Делится на». Обозначим через A подмножество X , состоящее из простых чисел, и через S — сужение R на A . Найдите область значений соответствия S .

- 2.17. Как, зная граф соответствия R , построить граф (R^{-1}) ?
- 2.18. Для соответствия «Человек x прочел книгу y » постройте ему обратное и противоположное.
- 2.19. Докажите, что если соответствие R : 1) всюду определено, то R^{-1} сюръективно; 2) сюръективно, то R^{-1} всюду определено.
- 2.20. Докажите, что если соответствие R : 1) инъективно, то R^{-1} функционально; 2) функционально, то R^{-1} инъективно.
- 2.21. Обратно ли соответствие « x — брат y » соответствию « y — сестра x », если: 1) X и Y — множества всех людей; 2) X — множество мужчин, а Y — множество женщин?
- 2.22. Пусть Z — множество треугольников, Y — множество окружностей и X — множество точек. Зададим соответствия xRy — «Точка x является центром окружности y » и ySz — «Окружность y вписана в треугольник z ». Что значит соответствие $x(RS)z$?

§ 2.2. Бинарные отношения

Соответствия, для которых области отправления и прибытия совпадают, называют *отношениями*. При этом, поскольку речь идет об элементах одного и того же множества X , будем говорить не об отношениях между X и X , а об отношениях на множестве X .

Поскольку понятие отношения — частный случай понятия соответствия, то все сказанное о соответствиях переносится на отношения. Так, можно говорить о пересечении и объединении отношений, о несовместных и противоположных отношениях и т. д.

Пример 2.10. Отношение перпендикулярности на множестве прямых несовместно с отношением параллельности, а отношение «Старше» на множестве людей несовместно с отношением «Младше». Объединением отношений «Больше» и «Меньше» на множестве чисел является отношение неравенства, а пересечением отношений «Делится» и «Является делителем» на множестве натуральных чисел является отношение «Равно».

Но некоторые особенности, выделяющие рассматриваемый частный случай, все же имеются. Во-первых, отношение R^{-1} , обратное отношению R на множестве X , само является отношением на том же самом множестве (ведь в этом случае в записи xRy и x , и y принадлежат X). При этом $yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$.

Пример 2.11. Если X — множество натуральных чисел и R — отношение «Делится на», то обратным ему будет отношение «Является делителем», поскольку x делится на y в том и только в том случае, когда y является делителем x .

Во-вторых, если R и S — отношения в X , то их композиция RS также является отношением на X . При этом и SR также отношение на X , причем, вообще говоря, RS и SR не совпадают.

Пример 2.12. Если R — отношение «Быть братом», а S — «Быть женой», то RS — отношение «Брат жены», а SR — «Жена брата».

При изображении графами отношений на множестве X элементы этого множества изображают точками лишь один раз, а потом проводят стрелки из x в y , если xRy . При этом стрелка может начинаться и заканчиваться в одной и той же точке (такие стрелки называют *петлями*). Если стрелка идет и из x в y , и из y в x , то рисуют одну двойную стрелку.

Пусть некоторое отношение R на X задано графом, тогда для получения графа обратного отношения R^{-1} достаточно повернуть все стрелки в обратную сторону, а чтобы получить граф противоположного отношения \bar{R} — стереть все имеющиеся стрелки и провести все стрелки, которых не было на рисунке.

Если отношение R на числовом множестве X задано равенством или неравенством, то противоположное ему отношение получается путем замены знака « $=$ » на « \neq » и наоборот, замены « $<$ » на « \geq », а « $>$ » на « \leq » и наоборот. Чтобы получить отношение, обратное отношению $F(x, y) = a$ или отношению $F(x, y) > a$, надо переставить местами x и y .

Пример 2.13. Для отношения $x^2 + 3y^2 = 1$ противоположным является $x^2 + 3y^2 \neq 1$, а обратным — $y^2 + 3x^2 = 1$; для отношения $8x^3 + y^2 > 9$ ими будут $8x^3 + y^2 \leq 9$ и $8y^3 + x^2 > 9$ соответственно.

На любом множестве X существует отношение тождества T , выполняющееся в том и только в том случае, когда $x = y$ совпадают. Граф отношения T состоит из всех петель, соответствующих элементам множества X , а график — из всех пар (x, x) , $x \in X$. При изображении графика в виде таблицы надо штриховать диагональные клетки.

Если R — отношение между числами, то точечный график отношения R^{-1} получается из точечного графика отношения R , симметричного относительно прямой $y = x$.

Отношение R на множестве X называется *рефлексивным*¹ (в записи xRx элемент x как бы «отражается» в букве R), если для всех

¹ *Reflexio* (лат.) — отражение.

$x \in X$ имеем xRx . Более формально свойство рефлексивности можно записать так: $T \subset R$ (отношение является следствием отношения тождества).

Многие отношения, изучаемые в школьной математике, обладают свойством рефлексивности. Например, отношение параллельности на множестве прямых рефлексивно, так как любая прямая считается параллельной самой себе: $x \parallel x$. Рефлексивны и отношение подобия на множестве геометрических фигур, и отношение равносильности на множестве уравнений, и отношение «Быть ребенком тех же родителей» на множестве людей и т. д.

Отношение перпендикулярности на множестве прямых линий не является рефлексивным. Более того, ни одна прямая не перпендикулярна самой себе, т. е. отношения перпендикулярности и тождества несовместны друг с другом.

Отношение R на X называется *антирефлексивным*, если оно несовместно с отношением тождества, $R \cap T = \emptyset$, или, что то же самое, если из него следует отношение различия (например, для прямых линий из того, что $x \perp y$, следует, что $x \neq y$). Антирефлексивны и отношения «Больше» и «Меньше» на множестве чисел, «Выше» и «Ниже», «Легче» и «Тяжелее», «Старше» и «Моложе» на множестве людей и т. д. Отношение «Учиться в одном классе» не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным.

Свойство отношения R , заключающееся в том, что из xRy следует yRx , называют *симметричностью* этого отношения. Формально можно сказать, что отношение R симметрично тогда и только тогда, когда оно совпадает с обратным ему отношением: $R = R^{-1}$. В самом деле, вместо yRx можно написать $xR^{-1}y$, и тогда из xRy следует $xR^{-1}y$, а из $xR^{-1}y$ следует xRy , и потому $R = R^{-1}$.

Примерами симметричных отношений могут служить параллельность на множестве прямых, касание на множестве окружностей, конгруэнтность на множестве геометрических фигур, равенство остатков при делении на 7 на множестве натуральных чисел и т. д. Если отношение R симметрично, то его граф состоит из двойных стрелок и некоторых (не обязательно всех) петель (рис. 2.8). А при задании такого отношения таблицей множество заштрихованных клеток симметрично относительно диагонали T . При задании симметричного отношения точечным графиком получается множество, симметричное относительно прямой $y = x$.

Разумеется, не всякое отношение обладает свойством симметричности. Например, ни отношение «Выше», ни отношение «Тя-

желез» этим свойством не обладают. Более того, графики этих отношений не пересекаются с графиками обратных им отношений (не может быть, что одновременно и x выше, чем y , и y выше, чем x).

Если ни для каких x и y не выполняются одновременно xRy и yRx , то R называют *асимметричным* отношением. Отношение R называют *антисимметричным*, если оно рефлексивно и из xRy и yRx следует, что $x = y$.

Отношение R на множестве X называется *транзитивным*, если из xRy и yRz вытекает xRz . Используя понятие композиции отношений, это условие можно записать так: $R \circ R \subset R$. В самом деле, $x(R \circ R)z$ означает, что найдется элемент y , такой, что xRy и yRz . По транзитивности отсюда следует, что xRz . А это и значит, что из $x(R \circ R)z$ следует xRz , т. е. что $R \circ R \subset R$.

Свойством транзитивности обладают отношения параллельности прямых (если прямая x параллельна прямой y , а прямая y — прямой z , то x параллельна z), делимости (если x делится на y , а y делится на z , то x делится на z) и т. д. Отношение перпендикулярности прямых нетранзитивно: из того, что $x \perp y$ и $y \perp z$, не только не следует, что $x \perp z$, но, более того, можно наверняка сказать, что прямые x и z не являются перпендикулярными.

Если для отношения R пересечение R^2 и R пусто: $R^2 \cap R = \emptyset$, то отношение называют *антитранзитивным*.

Если отношение R транзитивно и в его графе идут стрелки от x к y и от y к z , то должна быть и стрелка, идущая от x к z . Такое обилие стрелок затрудняет изображение графа. Поэтому для транзитивных отношений изображают лишь часть стрелок и словесно указывают, что отношение R транзитивно.

Отношение R на множестве X называется *связанным*, если декартово произведение $X \times X$ является объединением трех подмножеств: $T = \{(x, x), x \in X\}$, графика отношения R и графика обратного ему отношения R^{-1} .

Пример 2.14. Отношение «Делится на» на множестве натуральных чисел не является связанным, так как существуют такие различные натуральные числа x и y , что ни x не делится на y , ни y не делится на x . На множестве же $X = \{2^n, n \in \mathbb{N}\}$ отношение «Делится на» — связанное, так как для любых m и n или 2^m делится на 2^n , или 2^n делится на 2^m .

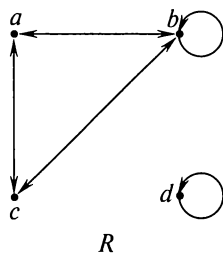


Рис. 2.8

Отношением *эквивалентности* на множестве X называется любое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение R .

Пример 2.15. Отношение «Жить в одном доме» является эквивалентностью на множестве людей (оно рефлексивно, симметрично и транзитивно), а отношение «Жить на одной улице» эквивалентностью не является. Дело в том, что человек u может жить в угловом доме на пересечении двух улиц, а x и z — на этих улицах. Тогда x и u живут на одной улице, равно как u и z , но x и z живут на разных улицах. Не является эквивалентностью и отношение «Служить в одном полку» на множестве военнослужащих. Оно симметрично и транзитивно, но не рефлексивно — есть военнослужащие, не принадлежащие никакому полку (например, моряки), и о них нельзя сказать, что они служат в одном полку сами с собой.

Если на множестве X задано отношение эквивалентности R , то *классом эквивалентности* элемента $a \in X$ по модулю R называется множество всех $b \in X$, для которых aRb .

■ **Теорема 2.1.** Всякое отношение эквивалентности R на множестве X задает разбиение множества X , блоками которого являются классы эквивалентности по модулю R . И обратно, всякому разбиению множества X соответствует отношение эквивалентности R , классы эквивалентности которого совпадают с блоками разбиения.

Доказательство. Пусть R — отношение эквивалентности на X . Докажем, что любые два множества $R(a)$ и $R(c)$ либо совпадают, либо не пересекаются. Для этого достаточно показать, что если пересечение $R(a)$ и $R(c)$ непусто, то $R(a) = R(c)$. Предположим, что $b \in R(a) \cap R(c)$. Так как $b \in R(c)$, то cRb , а тогда в силу симметричности R получаем bRc . Но в силу транзитивности R из aRb и bRc следует aRc . Возьмем теперь любой элемент $z \in R(c)$. Тогда имеем cRz и из aRc и cRz получаем, что aRz , т. е. $z \in R(a)$. Значит, каждый элемент из $R(c)$ принадлежит $R(a)$ и потому $R(c) \subset R(a)$. Точно так же доказывается, что $R(a) \subset R(c)$, а значит, $R(a) = R(c)$.

Итак, различные подмножества $R(a)$ не пересекаются друг с другом. При этом в силу рефлексивности R имеем: $a \in R(a)$, и потому объединение всех $R(a)$, $a \in X$, совпадает с X . Мы получили разбиение X на попарно непересекающиеся подмножества.

Пусть множество X разбито на непересекающиеся подмножества. Введем на X отношение R : « x принадлежит тому же подмножеству разбиения, что и y ». Оно является эквивалентностью. В самом деле, R рефлексивно, так как каждый элемент x лежит в одном из подмножеств разбиения, а значит, лежит в одном подмножестве сам с собою; оно симметрично, так как если x лежит в том же подмножестве разбиения, что и y , то и y лежит в одном подмножестве с x ; наконец, это отношение транзитивно, так как если x лежит в одном подмножестве с y , а y — в одном подмножестве с z , то x и z принадлежат одному и тому же подмножеству (здесь использовано условие, что подмножества попарно не пересекаются, иначе могло бы случиться, что x и z находятся в разных подмножествах, а y принадлежит пересечению этих подмножеств).

Итак, с каждым разбиением множества на попарно непересекающиеся подмножества связано некоторое отношение эквивалентности. Теорема доказана.

Разбиение множества на попарно непересекающиеся подмножества лежит в основе всех классификаций. Например, в библиотеках множество всех книг разбивают на книги по математике, по физике, по химии, по истории и т. д., в биологии множество всех живых существ разбивают на виды, множество видов — на роды и т. д.

Отношение R на множестве X называется *отношением строгого порядка*, если оно транзитивно и асимметрично. Легко проверить, что любое отношение строгого порядка антирефлексивно. Ведь xRx противоречило бы асимметричности R . Кроме того, отметим, что отношение R^{-1} , обратное отношению строгого порядка, тоже является отношением того же типа.

Например, отношению строгого порядка «Меньше» на множестве действительных чисел обратное отношение «Больше».

Множество, на котором определено отношение строгого порядка, называют *упорядоченным*.

Например, множество натуральных чисел упорядочено отношением «Меньше». Но это же множество упорядочено и другим отношением — «Делится на и больше». Между этими отношениями порядка есть существенная разница. Если взять два различных натуральных числа m и n , то окажется, что или $m < n$, или $n < m$. Иными словами, отношение «Меньше» на множестве натуральных чисел связанное. Связанное оно и на множестве действитель-



Рис. 2.9

ных чисел. Граф отношения «Меньше» на множестве натуральных чисел можно изобразить в виде луча (рис. 2.9). А отношение «Делится на» не является связанным; например, ни 12 не делится на 7, ни 7 не делится на 12. Граф этого отношения можно изобразить лишь на плоскости.

Связанные отношения порядка будем называть *линейными*.

Отношению «Меньше» на множестве действительных чисел противоположно отношение «Не меньше». Оно уже не является отношением строгого порядка, так как не асимметрично. Дело в том, что при $x = y$ выполняются и отношение $x \geq y$, и отношение $y \geq x$. Иными словами, отношение «Не меньше» является объединением отношения строгого порядка «Больше» и отношения тождества.

Отношение R в X является отношением *нестрогого порядка*, если оно транзитивно и антисимметрично. Всякое отношение нестрогого порядка рефлексивно.

Отношение «Не длиннее» на множестве отрезков транзитивно и, как легко видеть, рефлексивно. Но оно не является отношением нестрогого порядка, так как нарушено условие антисимметричности: из того, что отрезок x не длиннее отрезка y , а отрезок y — отрезка x , еще не следует совпадение этих отрезков (они могут быть различными, но иметь одну и ту же длину). Рефлексивные и транзитивные отношения называют *отношениями квазипорядка*¹.

Если R — отношение квазипорядка, то $R \cap R^{-1}$ — отношение эквивалентности. Обозначим через Y множество классов эквивалентности. Можно показать, что R определяет отношение нестрогого порядка на R . В разобранный выше примере Y состоит из классов отрезков, имеющих одну и ту же длину.

Отношение R на множестве X называется отношением *толерантности*² (сходства), если оно рефлексивно и симметрично.

Пример 2.16. Назовем два слова *сходными*, если они состоят из одинакового числа букв и отличаются не более чем на одну бук-

¹ *Quasi* (лат.) — ненастоящий.

² *Tolerantia* (лат.) — терпимость, допустимость.

ву. Например, сходны слова «роза» и «коза», равно как и слова «коза» и «коса». Однако слова «роза» и «коса» не являются сходными, так как различаются в двух буквах. С помощью перехода от слова к сходному с ним слову можно «превратить муху в слона». Вот одна из возможных цепочек:

Муха — мура — тура — тара — кара — каре — кафе — кафр — каюр — каюк — крюк — крок — срок — сток — стон — слон.

Пример 2.17. Всякое измерение имеет определенную точность ε . Назовем две величины ε -сходными, если они отличаются друг от друга меньше чем на ε . Измерение, выполненное с точностью до ε , не позволяет различить две ε -сходные величины. Но если x ε -сходно с y , а y ε -сходно с z , то x и z являются лишь 2ε -сходными. Поэтому отношение ε -сходства величин лишь рефлексивно и симметрично, но не является транзитивным.

Чтобы задать отношение толерантности на данном множестве X , достаточно выбрать в нем несколько непустых подмножеств A_1, \dots, A_n , покрывающих все множество X (т. е. таких, что X является объединением этих множеств), и назвать элементы x и y из X толерантными, если они принадлежат одному и тому же множеству. Это отношение, несомненно, рефлексивно и симметрично, но транзитивным оно будет лишь в случае, когда различные подмножества A_i и A_k не имеют общих элементов.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- 2.23. Найдите область определения и множество значений для отношения «Быть отцом» в множестве людей. Сделайте то же самое для отношения «Быть братом». Какое из этих отношений сюръективно? Какое из них инъективно?
- 2.24. Найдите образ числа 3 для следующих отношений в множестве действительных чисел:
- 1) $x^2 + y^2 \leq 25$;
 - 2) $y \geq x^2 + 1$.
- 2.25. Дано множество $X = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. Укажите графики следующих отношений в X :
- 1) x меньше y ;
 - 2) x делится на y ;
 - 3) x вдвое больше, чем y ;
 - 4) x на 2 больше, чем y .
- 2.26. В множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ задано отношение R «Делится на». Найдите $R^{-1}(\{2, 3, 4\})$.

- 2.27. Какое отношение в множестве чисел обратно отношению «Меньше»? А какое противоположно?
- 2.28. В множестве действительных чисел задано отношение $y \geq x^2$. Какое отношение обратно и какое — противоположно ему?
- 2.29. Найдите область задания и множество значений для отношения $x + y = 8$, если x и y — натуральные числа.
- 2.30. Изобразите точечный график отношения $y = 3x$ для множества $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
- 2.31. Пусть X и Y — множества, указанные в задаче 2.3, и R — соответствие «В слово x входит буква y ». Составьте графики отношений RR^{-1} в X и $R^{-1}R$ в Y . Постройте графы этих отношений. Найдите RR^{-1} (папа) и $R^{-1}R(\phi)$.
- 2.32. Равны ли $R \cap S$ и $Q \cap S$, если
$$R: x^2 + y^2 = 25, S: x + y = 7, Q: xy = 12?$$
- 2.33. Для следующих отношений запишите обратное, противоположное и обратное противоположному:
1) $x^2 + 6y^2 > 1$;
2) $x^2 + 8x + 4y^2 + 1 \geq 6$;
3) $x^4 + 16y^4 \geq 81$.
- 2.34. В множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$ задано отношение «Быть делителем». Постройте граф этого отношения и укажите, какими из указанных выше свойств (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, асимметричность, антисимметричность, транзитивность, антитранзитивность, связанность) обладает это отношение.
- 2.35. Какие из следующих отношений между людьми являются рефлексивными, какие — симметричными и какие — транзитивными:
1) «Быть сестрой»;
2) «Быть начальником»;
3) «Быть другом»;
4) «Быть отцом»;
5) «Иметь одинаковый цвет глаз» (оттенки цветов не учитываются)?
- 2.36. График отношения R в множестве $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ состоит из следующих пар: (a, a) , (a, b) , (b, a) , (a, c) , (c, a) , (b, c) , (c, b) , (b, b) , (d, f) , (f, d) , (c, c) , (d, d) , (f, f) . Какими свойствами обладает это отношение? Какие пары надо добавить, чтобы получилось рефлексивное отношение?
- 2.37. График отношения R в множестве $X = \{a, b, c, d, e\}$ состоит из следующих пар: (a, a) , (a, b) , (a, c) , (b, d) , (c, e) . Какие пары надо добавить, чтобы получился график симметричного отношения? Какие пары надо добавить, чтобы получился график транзитивного отношения?
- 2.38. Докажите, что объединение отношения R с обратным ему отношением R^{-1} является симметричным отношением.
- 2.39. Докажите, что пересечение отношения R и обратного ему отношения R^{-1} — симметричное отношение.
- 2.40. Докажите, что пересечение отношения R с отношением $\overline{R^{-1}}$, которое противоположно отношению R^{-1} , асимметрично.

- 2.41. Докажите, что пересечение асимметричного отношения с отношением тождества пусто.
- 2.42. Докажите, что любое отношение в множестве X является объединением симметричного и асимметричного отношений.
- 2.43. Докажите, что пересечение симметричного и асимметричного отношений пусто.
- 2.44. Верно ли, что любое отношение либо симметрично, либо антисимметрично? Приведите примеры.
- 2.45. Дайте несколько примеров антитранзитивных отношений. Является ли каждое отношение либо транзитивным, либо антитранзитивным?
- 2.46. Является ли отношением эквивалентности «Иметь одинаковые остатки при делении на 7»?
- 2.47. Какие из следующих отношений являются отношениями эквивалентности:
1) «Равноудаленность от Москвы» (в множестве городов);
2) «Принадлежность одному роду» (в множестве живых существ);
3) «Быть двоюродным братом или сестрой» (в множестве людей);
4) «Иметь общую границу» (в множестве государств)?
- 2.48. Можно ли разбить множество треугольников на такие классы: разносторонние, равнобедренные и равносторонние?
- 2.49. Можно ли разбить множество целых чисел на подмножества положительных и отрицательных чисел?
- 2.50. На плоскости проведена прямая l . Можно ли сказать, что множество всех прямых на этой плоскости разбивается на три класса: параллельные данной прямой, перпендикулярные ей, пересекающиеся с этой прямой?
- 2.51. На какие классы разбивается множество натуральных чисел отношением «Иметь одинаковые остатки при делении на 5»?
- 2.52. На плоскости проведена окружность. Можно ли разбить множество всех окружностей на этой плоскости на два класса: касающихся этой окружности и пересекающихся с ней в двух точках? Какой класс окружностей надо еще добавить?
- 2.53. На какие классы разбивается множество русских слов?
- 2.54. На какие классы разбивается множество слов предложения?
- 2.55. Пусть отношение R рефлексивно и транзитивно. Докажите, что пересечение $R \cap R^{-1}$ — отношение эквивалентности. Является ли эквивалентностью $R \cup R^{-1}$?
- 2.56. Является ли отношением эквивалентности равносильность уравнений?
- 2.57. Отношение параллельности рефлексивно, симметрично и транзитивно. На какие классы разбивается множество прямых линий на плоскости этим отношением?
- 2.58. Отношение концентричности окружностей рефлексивно, симметрично и транзитивно. На какие классы разбивается множество окружностей на плоскости этим отношением? Установите биективное соответ-

ствие между множеством точек плоскости и множеством классов эквивалентности.

- 2.59. Является ли отношением порядка отношение «Гора x не выше горы y »?
- 2.60. Является ли отношением порядка отношение «Лежать внутри» для геометрических фигур?
- 2.61. Какие из отношений упражнения 2.35 являются отношениями толерантности, но не являются отношениями эквивалентности?

§ 2.3. Логические таблицы

Рассмотрим класс задач, в условиях которых указаны несколько конечных множеств с одинаковым числом элементов. При этом даны некоторые зависимости между элементами и требуется установить по этим зависимостям соответствие между множествами. Нахождение такого соответствия производится с помощью специальных таблиц, состоящих из $n \times n$ клеток (число n и количество таблиц зависит от условий конкретной задачи). Данные задачи вносятся в соответствующие клетки таблицы, например, положительный результат знаком «+», а отрицательный знаком «—». После использования всех условий задачи клетки, оставшиеся пустыми, заполняют знаком «+» или «—», установленными путем логических рассуждений. Применение таких таблиц, которые (см. § 2.1) являются графиками соответствий между множествами, значительно ускоряет, почти автоматизирует решение логических задач данного класса.

Покажем ход решения таких задач на конкретных примерах.

Пример 2.18. Встретились три друга — Белов, Серов и Чернов. Чернов сказал другу, одетому в серый костюм: «Интересно, что на одном из нас белый костюм, на другом — серый и на третьем — черный, но на каждом костюме цвета, не соответствующего фамилии». Какой цвет костюма у каждого из друзей?

Решение. В левом столбце таблицы 3×3 (табл. 2.2) напомним фамилии друзей, в верхней строке — цвета их костюмов. По условию на Белове — не белый костюм, на Серове — не серый и на Чернове — не черный. Поставим три минуса на пересечении соответствующих строк и столбцов таблицы.

На Чернове — не серый костюм, так как по условию в серый костюм одет один из его друзей; ставим минус в соответствующей клетке. Следовательно, на нем может быть только костюм белого цвета; поставим в соответствующей клетке таблицы плюс.

Таблица 2.2

<i>Фамилия</i>	<i>Белый</i>	<i>Серый</i>	<i>Черный</i>
Белов	—		
Серов		—	
Чернов			—

Таблица 2.3

<i>Фамилия</i>	<i>Белый</i>	<i>Серый</i>	<i>Черный</i>
Белов	—	+	—
Серов	—	—	+
Чернов	+	—	—

Тогда на Серове — не белый костюм, значит, на нем может быть лишь черный костюм, а на Белове — серый костюм (табл. 2.3).

Эту задачу нетрудно было бы решить и без помощи таблицы — непосредственным перебором. Но если в подобной задаче нужно установить соответствие между двумя множествами, каждое из которых содержит не по три, а по четыре, пять или шесть (и более!) элементов, то ее решение с помощью таблицы гораздо проще.

Обратим внимание на следующее свойство таблицы, которое остается справедливым в аналогичных задачах на соответствие между двумя множествами, но только лишь в тех случаях, когда эти множества содержат элементов поровну: в каждой строке таблицы имеется только один плюс, в каждом столбце также имеется только один плюс. Следовательно, если в какой-либо клетке таблицы стоит плюс, то в остальных клетках, стоящих в той же строке или в том же столбце, может быть только минус.

Пример 2.19. В бутылке, стакане, кувшине и банке находится молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что:

- 1) вода и молоко не в бутылке;
- 2) сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом;
- 3) в банке не лимонад и не вода;
- 4) стакан стоит около банки и сосуда с молоком.

Куда налита каждая жидкость?

Таблица 2.4

<i>Жидкость</i>	<i>Бутылка</i>	<i>Стакан</i>	<i>Кувшин</i>	<i>Банка</i>
Молоко	—	—		—
Лимонад			—	—
Квас			—	
Вода	—			—

Р е ш е н и е. В этой задаче речь идет о двух множествах — множестве сосудов и множестве жидкостей. Воспользуемся таблицей 4×4 (табл. 2.4).

Из условия 1) следует, что в первой и четвертой клетках первого столбца нужно поставить знак «—». Из условия 2) следует, что в кувшине не лимонад и не квас, а поэтому во второй и третьей клетках третьего столбца нужно поставить знак «—». Из условия 3) следует, что во второй и четвертой клетках четвертого столбца должен быть знак «—». Из условия 4) следует, что молоко не в стакане и не в банке, а поэтому в первых клетках второго и четвертого столбцов нужно поставить знак «—». Эти данные занесем в таблицу 2.4.

Теперь, когда использованы основные условия задачи, видно, что молоко находится в кувшине, квас может находиться только в банке. Следовательно, в первой клетке третьего столбца и в третьей клетке четвертого столбца нужно поставить знак «+». Но при этом очевидно, что вода не в кувшине, а квас не в бутылке и не в стакане. Значит, в третьей клетке первого столбца и в третьей клетке второго столбца, и в четвертой клетке четвертого столбца нужно поставить знак «—». Из этого следует, что вода может быть только в стакане, а лимонад только в бутылке. Это позволяет заполнить таблицу до конца. Заполненная таблица 2.5 дает решение задачи.

Отметим, во-первых, что в решенной задаче было выделено два множества по четыре элемента. Число элементов в множествах, разумеется, может быть и иным. В зависимости от этого таблицы будут различных размеров.

Во-вторых, в этой задаче требуется установить взаимно однозначное соответствие между элементами двух множеств. Однако соответствие между элементами множеств может быть и не взаимно однозначно.

Рассмотрим задачу с указанной особенностью.

Таблица 2.5

<i>Жидкость</i>	<i>Бутылка</i>	<i>Стакан</i>	<i>Кувшин</i>	<i>Банка</i>
Молоко	—	—	+	—
Лимонад	+	—	—	—
Квас	—	—	—	+
Вода	—	+	—	—

Пример 2.20. На международном конгрессе по проблемам прикладной магии на Соловках встретились четыре делегата из разных стран. Каждый из них владел двумя языками из четырех (русский, английский, французский, итальянский) официальных языков конференции. Однако оказалось, что не было такого языка, на котором они могли бы разговаривать вчетвером. И был только один язык, на котором могли вести беседу трое из них. Никто из делегатов не владеет французским и русским языками одновременно. Хотя физик не говорит по-английски, он может служить переводчиком, если историк и биолог захотят поговорить друг с другом. Историк говорит по-русски и может говорить с математиком, хотя тот не знает ни одного русского слова. Физик, математик и биолог не могут беседовать втроем на одном языке. Какими двумя языками владеет каждый из них?

Решение. Для решения задачи воспользуемся таблицей 4×4 . Так как каждый ученый владеет двумя языками, то в результате решения задачи в двух клетках каждого столбца мы должны получить знак «—». По условию задачи физик не владеет английским языком. Математик не владеет русским, а историк владеет русским, но не владеет французским. Поэтому таблица заполняется следующим образом (табл. 2.6).

Таблица 2.6

<i>Язык</i>	<i>Физик</i>	<i>Историк</i>	<i>Биолог</i>	<i>Математик</i>
Русский		+		—
Английский	—			
Французский		—		
Итальянский				

Таблица 2.7

<i>Язык</i>	<i>Физик</i>	<i>Историк</i>	<i>Биолог</i>	<i>Математик</i>
Русский		+	—	—
Английский	—			
Французский		—		
Итальянский	+	+	—	+

Далее, так как биолог не может говорить с историком без переводчика, то он не владеет русским языком. Установим язык, на котором могли разговаривать сразу трое ученых. Это не может быть русский язык, так как русским не владеет биолог и математик. Это не может быть английский язык, так как им не владеет физик, и если бы им владели одновременно историк, биолог и математик, то историк и биолог при разговоре обходились бы без переводчика. Если теперь предположить, что таким языком является французский, то на нем должны говорить физик, биолог и математик, но по условию задачи они не могут беседовать втроем на одном языке. Следовательно, языком на котором могли разговаривать сразу трое ученых является итальянским, и говорят на нем физик, историк и математик. Действительно, физик, биолог и математик не говорят сразу на одном языке, а историк и биолог не обходятся без переводчика. Таким образом мы получаем таблицу 2.7.

Из таблицы 2.7 следует, что историк не владеет английским языком. При этом физик может быть переводчиком в разговоре историка с биологом только в случае, если биолог и физик владеют французским языком (биолог не знает русского и итальянского, а физик не знает английского). Но если физик знает французский язык, то он не владеет русским языком. Вторым языком биолога должен быть английский (русского и итальянского он не знает).

И, наконец, математик не знает французского языка, так как в противном случае физик, биолог и математик говорили бы на одном языке. Поэтому математик владеет английским языком. Окончательно заполненная таблица принимает вид (табл. 2.8).

О т в е т. Физик владеет французским и итальянским, историк — русским и итальянским, биолог — английским и французским, математик — английским и итальянским.

Таблица 2.8

<i>Язык</i>	<i>Физик</i>	<i>Историк</i>	<i>Биолог</i>	<i>Математик</i>
Русский	—	+	—	—
Английский	—	—	+	+
Французский	+	—	+	—
Итальянский	+	+	—	+

Нередко для решения задач рассматриваемого класса приходится составлять не одну, а несколько таблиц, т. е. по-существу одну таблицу, но более чем с двумя входами. Опишем решение одной из таких задач.

Пример 2.21. Маша, Лида, Женя и Катя умеют играть на различных инструментах (виолончели, рояле, гитаре и скрипке), но каждая только на одном. Они же владеют различными иностранными языками (английским, французским, немецким и испанским), но каждая только одним. Известно, что:

- 1) девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански;
- 2) Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;
- 3) Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;
- 4) девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели;
- 5) Женя знает французский, но не играет на скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает? (Найти оба решения этой задачи).

Решение. Составим две таблицы 4×4 (табл. 2.9 и 2.10).

Таблица 2.9

<i>Имя</i>	<i>Виолончель</i>	<i>Рояль</i>	<i>Гитара</i>	<i>Скрипка</i>
Маша	—			—
Лида	—			—
Женя	+	—	—	—
Катя	—	—	—	+

Таблица 2.10

<i>Имя</i>	<i>Английский</i>	<i>Французский</i>	<i>Немецкий</i>	<i>Испанский</i>
Маша	—	—		
Лида	—	—		
Женя	—	+	—	—
Катя	+	—	—	—

Из условия 2) следует, что в таблице 2.9 в первой и четвертой клетках второй строки можно поставить знак «—» и в таблице 2.10 в первой клетке второй строки нужно поставить знак «—». Из условия 3) следует, что в таблице 2.9 в первой и четвертой клетках первой строки нужно поставить знак «—» и в таблице 2.10 в первой клетке первой строки нужно поставить знак «—». Из условия 5) следует, что в четвертой клетке третьей строки в таблице 2.9 нужно поставить знак «—», а во второй клетке третьей строки таблицы 2.10 нужно поставить знак «+». Но при этом видно, что ни Катя, ни Лида, ни Маша не знают французского языка, значит, в первой, второй и четвертой клетках второго столбца таблицы 2.9 нужно поставить знак «—». Женя не владеет ни английским, ни испанским, ни немецким языками, поэтому в первой, третьей и четвертой клетках третьей строки таблицы 2.10 нужно поставить знак «—». Из таблицы 2.10 видно, что английским языком может владеть только Катя, значит, в четвертой клетке первого столбца таблицы 2.9 ставим знак «+», а в третьей и четвертой клетках четвертого столбца таблицы 2.10 нужно поставить знак «—». Из таблицы 2.9 видно, что на скрипке может играть только Катя, значит, нужно в четвертой клетке четвертого столбца таблицы 2.9 поставить знак «+», а в первой, второй и третьей клетках четвертой строки поставить знак «—». Женя может играть только на виолончели, так как ни Маша, ни Лида, ни Катя не могут играть на виолончели (см. табл. 2.9). Из таблицы 2.9 следует, что либо Маша играет на гитаре и, следовательно, она владеет испанским языком (по условию 1)), но тогда Лида говорит по-немецки и играет на рояле; либо Лида играет на гитаре и, следовательно, она владеет испанским языком (по условию 1)), но тогда Маша говорит по-немецки и играет на рояле. Следовательно, здесь задача допускает два решения.

При решении этой задачи можно было бы составить прямоугольную таблицу 4×8 , т. е. таблицу с тремя входами.

Рассмотрим пример, решение которого требует составление трех таблиц.

Пример 2.22. Три студента: Андреев, Борисов и Воронов учатся на различных факультетах Иркутского университета (историческом, физическом, математическом). Все они приехали из различных городов Иркутской области: Ангарска, Братска и Шелехова, причем один из них увлекается футболом, другой баскетболом, третий волейболом. Известно, что:

- 1) Андреев не из Шелехова, а Борисов не из Братска;
- 2) шелеовец учится не на историческом факультете;
- 3) братчанин учится на математическом факультете и увлекается футболом;
- 4) Воронов учится на историческом факультете;
- 5) физик не любит волейбола.

Из какого города, на каком факультете учится и каким видом спорта увлекается каждый студент?

Решение. Для решения задачи составим три таблицы 2.11, 2.12 и 2.13. Из условия 1) следует, что в первой клетке третьей строки и во второй клетке второй строки таблицы 2.12 нужно поставить знак «—». Но тогда с учетом условия 3) заключаем, что Борисов не учится на математическом факультете и не увлекается футболом. Это позволяет во вторых клетках третьей строки таблицы 2.11 и первой строки таблицы 2.13 поставить «—».

По условию 4) в третьей клетке первой строки таблицы 2.11 нужно поставить знак «+», а в остальных клетках первой строки и третьего столбца поставить знак «—». При этом из таблицы 2.11 сразу видно, что Андреев учится на математическом, а Борисов на физическом факультетах.

Таблицы 2.11 и условие 3) приводят к заключению, что Андреев — братчанин и увлекается футболом. Но тогда в первой

Таблица 2.11

Факультет	Фамилия		
	Андреев	Борисов	Воронов
Исторический	—	—	+
Физический	—	+	—
Математический	+	—	—

Таблица 2.12

<i>Город</i>	<i>Фамилия</i>		
	<i>Андреев</i>	<i>Борисов</i>	<i>Воронов</i>
Ангарск	—	—	+
Братск	+	—	—
Шелехов	—	+	—

Таблица 2.13

<i>Вид спорта</i>	<i>Фамилия</i>		
	<i>Андреев</i>	<i>Борисов</i>	<i>Воронов</i>
Футбол	+	—	—
Баскетбол	—	+	—
Волейбол	—	—	+

клетке второй строки таблицы 2.12 и в первой клетке первой строки таблицы 2.13 нужно поставить знак «+», а в остальных клетках первого столбца и второй строки таблицы 2.12 и первого столбца и первой строки таблицы 2.13 нужно поставить знак «—».

Так как по условию 2) шелеховец не историк, то, следовательно, Воронов не шелеховец, а поэтому в третьей клетке третьей строки таблицы 2.12 нужно поставить знак «—». Тогда из таблицы 2.12 вытекает, что Борисов — из Шелехова, а Воронов — из Ангарска, и таблица 2.12 заполняется целиком.

Согласно условию 5) физик, т. е. Борисов, не любит волейбола, и поэтому во второй клетке третьей строки таблицы 2.13, нужно поставить знак «—». В связи с этим из таблицы 2.13 видно, что Воронов любит волейбол, а Борисов баскетбол.

Пример 2.23. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. В ходе следствия каждый из них сделал по два заявления.

Браун: «Я не делал этого. Джонс не делал этого».

Смит: «Я не делал этого. Это сделал Браун».

Джонс: «Браун не делал этого. Это сделал Смит».

Потом оказалось, что один из них дважды сказал правду, другой — дважды солгал, третий — раз сказал правду, раз солгал. Кто совершил преступление?

Таблица 2.14

<i>Имя</i>	<i>Преступник</i>		
	<i>Браун</i>	<i>Джонс</i>	<i>Смит</i>
Браун	— п	— п	+
Джонс	— п		+ п
Смит			

Решение. Трудность в том, что мы не знаем, кто оба раза сказал правду, кто солгал дважды и кто — только один раз. Рассмотрим три случая.

1) Пусть оба раза правду сказал Браун. Так как, согласно его заявлениям, он и Джонс не совершали преступления, то совершить его мог только Смит. Заполним следующую таблицу (табл. 2.14).

Условимся ставить плюсы лишь в клетках столбца, соответствующего преступнику, минусы — в остальных клетках. Буквами «п» и «л» справа от плюсов и минусов будем обозначать, правдиво или ложно данное заявление.

Получилось, что не только Браун, но и Джонс оба раза сказали правду. Но это противоречит условиям задачи.

Таблица 2.15

<i>Имя</i>	<i>Преступник</i>		
	<i>Браун</i>	<i>Джонс</i>	<i>Смит</i>
Браун	— п	— п	+
Джонс	— п		+ п
Смит			

Таблица 2.16

<i>Имя</i>	<i>Преступник</i>		
	<i>Браун</i>	<i>Джонс</i>	<i>Смит</i>
Браун	— л	— п	
Джонс	+ л		+ л
Смит	+ п		— п

2) Пусть оба раза правду сказал Джонс. Составим таблицу (табл. 2.15). И здесь получилось, что и Джонс, и Браун оба раза сказали правду.

3) Пусть теперь оба раза правду сказал Смит. Заполним таблицу (табл. 2.16). Получилось, что этот случай возможен. Так как такой случай только один, то преступником является Браун.

О т в е т. Браун.

С другим методом решения подобных задач — с помощью графов, мы познакомимся позднее (см. § 2.4).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- 2.62. *А, Б, В и Г* — друзья. Один из них — врач, другой — журналист, третий — тренер спортивной школы и четвертый — строитель. Журналист написал статьи об *А* и *Г*. Тренер и журналист вместе с *Б* ходили в туристический поход. *А* и *Б* были на приеме у врача. У кого какая профессия?
- 2.63. Написав контрольную работу по математике, три гнома Дори, Нори и Ори сообщили своему знакомому хоббиту Бильбо Бэггинсу следующее: Дори: «Я написал не на 5». Нори: «На этот раз я написал на 5». Ори: «Я написал не на 3». После проверки работ выяснилось, что гномы получили разные положительные оценки и из трех приведенных высказываний только одно верное. Какую оценку получил за контрольную работу каждый из гномов?
- 2.64. В одном дворе, на Пушкинской, живут четыре друга. Вадим и шофер старше Сергея; Николай и слесарь занимаются боксом; электрик — младший из друзей; по вечерам Антон и токарь играют в домино против Сергея и электрика. Определите профессию каждого из друзей.
- 2.65. На столе три совершенно одинаковых ящичка. В одном из них лежат два черных шарика, в другом — черный и белый, в третьем — два белых. На крышках ящичков есть надписи: «два черных», «два белых», «черный и белый». Однако известно, что ни одна из этих надписей не соответствует действительности. Сможете ли вы, вынув наугад шарик (и не заглядывая в ящички), определить, где какие шарики лежат?
- 2.66. На каждой из четырех расположенных в ряд коробок написан цвет двух вложенных в нее мотков пряжи: *ББ*, *БЗ*, *БК*, *ЗК* (*Б* — белый, *З* — зеленый, *К* — красный), но каждая надпись соответствует содержанию соседней коробки. Какие мотки вложены в каждую из коробок?
- 2.67. Вот какое испытание на сообразительность устроили однажды четверем любителям логических задач. Перед ними поставили четыре одинаковых ящичка. В одном лежали три черных шарика, в другом — два черных и один белый, в третьем — один черный и два белых, а в четвертом — три белых шарика. На каждом из ящичков были наклеены ярлычки: «три черных», «два черных, один белый», «один черный, два белых»,

«три белых». Однако участникам испытания было сказано, что ни один из ярлычков не соответствует содержимому того ящичка, на который он наклеен. Участникам дали по ящичку, причем предварительно всех рассадили так, что каждый мог видеть ярлычок только на своем ящичке. Затем каждый должен был наугад вынуть два шарика из трех и, не заглядывая в ящик, определить цвет оставшегося там шарика.

Первый из участников, вынув два шарика, сразу же сказал: «Я достал два черных шарика и могу сказать, какого цвета оставшийся шарик». Второй тоже не замедлил с ответом: «Я вынул один белый и один черный шарик и знаю, какой шарик остался в ящике».

Третий, вынув два шарика, прочитал еще раз надпись на своем ящике, подумал и сказал: «Я вынул два белых шарика, но определить, какой шарик остался в ящике, невозможно».

Четвертый был слепым и даже не видел, что написано на крышке его ящика. Однако, поразмыслив, он сказал: «Мне не нужно вынимать шарики. Я и без того знаю, какие шарики лежат в моем ящичке. Я даже знаю, какого цвета те шарики, которые остались в ящичках у каждого из моих товарищей».

Как мог слепой прийти к таким удивительным выводам? Какие шарик-ки оставались в ящичках его друзей, какие были у него самого?

- 2.68. Журавлев, Данилов и Никольский — друзья и владеют каждый двумя из следующих шести иностранных языков: английским, французским, немецким, итальянским, испанским и арабским. Каждым из этих языков владеет только один из них.

Знающие французский и испанский языки — любители хоккея. Журавлев — самый младший из друзей. Никольский чаще ходит в гости к знающему немецкий язык, чем к знающему испанский язык. Знающий немецкий язык старше знающего арабский язык. Журавлев и владеющий английским языком часто играют в шахматы, а владеющий арабским языком не умеет играть в шахматы. Какими языками владеет каждый из друзей?

- 2.69. Милиционер обернулся на звук бьющегося стекла и увидел четырех подростков, убегающих от окна, разбитого футбольным мячом. Через несколько минут они были в отделении милиции. При расспросах они сказали следующее.

Андрей: «Это не я. Это Григорий предложил играть в футбол. Виктор не виноват».

Виктор: «Это не я. Это не Андрей. Если бы я знал, чем это кончится, не стал бы играть в футбол».

Борис: «Это не я. Это сделал Виктор. Я играю в футбол лучше Григория».

Григорий: «Это не я. Это сделал Виктор. Когда я пришел, игра была в полном разгаре».

Из дальнейшего разговора выяснилось, что каждый два раза сказал правду, а один раз солгал. Кто разбил окно?

- 2.70. На заводе работают три друга: слесарь, токарь и сварщик. Их фамилии Борисов, Иванов и Семенов. У слесаря нет ни братьев, ни сестер, и он самый младший из друзей. Семенов женат на сестре Борисова, он старше токаря. Назовите фамилии слесаря, токаря и сварщика.
- 2.71. Имена трех друзей Костя, Вася и Коля. Их фамилии Семенов, Буров и Николаев. Дед Семенова родной брат их соседа Петрова. Костя на год старше Коли, а Коля на год старше Николаева. Сумма их лет больше 49, но меньше 53. Дочь всем известного профессора Коробова — мать Коли. Определите имя, фамилию и возраст каждого из друзей.
- 2.72. В течение последних четырех лет сотрудники НИИЧАВО Привалов, Амперян, Корнеев и Выбегалло получают очередные отпуска в мае, июне, июле и августе. Причем, один из них отдыхал в мае, другой — в июне, третий — в июле, а четвертый — в августе. Каждый из них получил отпуска в разное время. В первый год Корнеев отдыхал в июле, во второй год Корнеев отдыхал в августе, а Привалов в мае. На третий год Выбегалло отдыхал в июне, а Амперян на четвертый год — в июле. В каком месяце отдыхал Привалов в первый год?
- 2.73. В районном городке живут пятеро друзей: Иванов, Петренко, Сидорчук, Гришин, Капустин. Профессии у них разные: один из них — маляр, другой — мельник, третий — плотник, четвертый — почтальон, пятый — парикмахер. Петренко и Гришин никогда не держали в руках малярной кисти. Иванов и Гришин все собираются посетить мельницу, где работает их товарищ. Петренко и Капустин живут в одном доме с почтальоном. Сидорчук был недавно одним из свидетелей на свадьбе Петренко и дочери парикмахера. Иванов и Петренко каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром. Гришин и Капустин по субботам обязательно встречаются в парикмахерской, где работает их друг. Почтальон предпочитает бриться сам. Определите профессию каждого из друзей.
- 2.74. Кондратьев, Давыдов и Федоров живут на Пушкинской. Один из них столяр, другой — маляр, третий — водопроводчик. Федоров и Кондратьев — родственники. Недавно маляр попросил столяра починить кое-что у него дома за вполне приличную плату. Столяр обещал зайти, но не пришёл в условленный час. Маляр сам пошел к нему домой, но домашние столяра сказали, что тот ушел к внезапно заболевшему водопроводчику. Известно также, что Федоров никогда не слышал о Давыдове. Кто чем занимается?
- 2.75. Корнев, Докшин, Мареев и Скобелев — жители нашего города. Их профессии — пекарь, врач, инженер и милиционер. Корнев и Докшин — соседи и всегда на работу ездят вместе. Докшин старше Мареева. Корнев регулярно обыгрывает Скобелева в пинг-понг. Пекарь на работу всегда ходит пешком. Милиционер не живет рядом с врачом. Инженер и милиционер встречались единственный

раз, когда милиционер оштрафовал инженера за нарушение правил уличного движения. Милиционер старше врача и инженера. Определите, кто чем занимается.

- 2.76.** Борисов, Кириллов, Данин и Савин — инженеры. Один из них — автомеханик, другой — химик, третий — строитель, четвертый — радиотехник. Борисов, который обыгрывает в шахматы Данина, но проигрывает Савину, бегаёт на лыжах лучше того инженера, который моложе его, и ходит в театр вдвое чаще того инженера, который старше Кириллова. Химик, который посещает театр вдвое чаще, чем автомеханик, не является ни самым молодым, ни самым пожилым из этой четверки. Строитель, который на лыжах бегаёт хуже, чем радиотехник, как правило, проигрывает в шахматных сражениях автомеханику. Самый пожилой из инженеров лучше всех играет в шахматы и чаще всех бывает в театре, а самый молодой лучше всех ходит на лыжах. Назовите профессии каждого из этой четверки инженеров, если известно, что ни в спорте, ни в приверженности к театру среди них нет двух одинаковых.
- 2.77.** Дина, Соня, Коля, Рома и Миша учатся в институте. Их фамилии — Бойченко, Карпенко, Лысенко, Савченко и Шевченко.

Мать Ромы умерла. Родители Дины никогда не встречались с родителями Коли. Студенты Шевченко и Бойченко играют в одной баскетбольной команде. Услышав, что родители Карпенко собираются поехать за город, мать Шевченко пришла к матери Карпенко и попросила, чтобы та отпустила своего сына к ним на вечер, но оказалось, что отец Коли уже договорился с родителями Карпенко и пригласил их сына к Коле. Отец и мать Лысенко — хорошие друзья родителей Бойченко. Все четверо довольны, что их дети собираются пожениться. Установите имя и фамилию каждого из молодых людей и девушек.

- 2.78.** В семье Семеновых пять человек: муж, жена, их сын, сестра мужа и отец жены. Все они работают. Один — инженер, другой — юрист, третий — слесарь, четвертый — экономист, пятый — учитель.

Вот что еще известно о них. Юрист и учитель не кровные родственники. Слесарь — хороший спортсмен. Он пошел по стопам экономиста и играет в футбол за сборную завода. Инженер старше жены своего брата, но моложе, чем учитель. Экономист старше, чем слесарь. Назовите профессии каждого члена семьи Семеновых.

- 2.79.** В педагогическом институте Аркадьева, Бабанова, Корсакова, Дашков, Ильин и Флеров преподают экономическую географию, английский язык, французский язык, немецкий язык, историю, математику.

Преподаватель немецкого языка и преподаватель математики в студенческие годы занимались художественной гимнастикой. Ильин старше Флерова, но стаж работы у него меньше, чем у преподавателя экономической географии. Будучи студентками, Аркадьева и Бабанова учились вместе в одном университете. Все остальные окончили педагоги-

ческий институт. Флеров — отец преподавателя французского языка. Преподаватель английского языка — самый старший из всех по возрасту и по стажу работы. Он работает в этом институте с тех пор, как окончил его. Преподаватели математики и истории — его бывшие студенты. Аркадьева старше преподавателя немецкого языка. Назовите, кто какой предмет преподает.

- 2.80.** Поездная бригада состоит из бригадира, проводника, машиниста и помощника машиниста. Их зовут Андрей, Петр, Дмитрий и Трофим. Дмитрий старше Андрея. У бригадира нет родственников в бригаде. Машинист и помощник машиниста — братья. Других братьев у них нет. Дмитрий — племянник Петра. Помощник машиниста — не дядя проводника, а проводник — не дядя машиниста.

Кто в качестве кого работает и какие родственные отношения существуют между членами бригады?

- 2.81.** В купе пассажирского поезда «Москва—Одесса» ехали шесть пассажиров, живущих в разных городах: Москве, Санкт-Петербурге, Туле, Киеве, Перми и Одессе. Их фамилии: Агеев, Боков, Власов, Громов, Дубов и Елисеев. Известно, что:

- 1) Агеев и москвич — врачи;
- 2) Дубов и петербуржец — учителя;
- 3) Власов и туляк — инженеры;
- 4) Боков и Елисеев — участники Отечественной войны, а туляк в армии не служил;
- 5) пермяк старше Агеева, а одессит старше Власова;
- 6) Боков и москвич сошли в Киеве, а Власов и пермяк должны сойти в Харькове.

Определите профессию и место жительства каждого из пассажиров.

- 2.82.** В финале турнира шахматистов Российской Армии встретились представители восьми воинских званий: полковник, майор, капитан, лейтенант, старшина, сержант, ефрейтор и солдат. Все из разных родов войск: один — пехотинец, другой — летчик, затем танкист, артиллерист, десантник, минометчик, сапер и химик.

Определите воинскую специальность каждого из восьми шахматистов по следующим данным.

В 1-м туре полковник играл с десантником. Летчик приехал только ко второму туру. Во 2-м туре пехотинец играл с ефрейтором и майор со старшиной. После 2-го тура капитан выбыл из турнира по болезни.

Из-за этого выходными оказались: в 3-м туре сержант, в 4-м туре танкист, в 5-м туре майор. В 3-м туре лейтенант выиграл у пехотинца, а партия полковника с артиллеристом окончилась вничью. В 4-м туре сапер выиграл у лейтенанта, а старшина — у полковника. Перед по-

следним туром доигрывалась оставшаяся не оконченной в 6-м туре партия десантника с минометчиком.

У к а з а н и е. В турнире один и тот же шахматист два раза выходным не бывает и с каждым партнером играет только одну партию.

§ 2.4. Графы

Очень удобным средством анализа логических возможностей является построение графа. Иногда граф может играть вспомогательную роль в сочетании с другими методами решения логических задач.

Графом называется конечное множество точек, называемых *вершинами*, некоторые из которых соединены линиями, называемыми *ребрами*. Число ребер, исходящих из вершины графа, называется *степенью* этой вершины.

Отметим, что данный способ введения понятия графа, разумеется, не является единственно возможным. С таким же успехом графы можно задавать бинарными матрицами, таблицами, списками смежности и т. д.

С графами мы встречаемся гораздо чаще, чем это кажется на первый взгляд. Примерами графов могут служить любая карта дорог, электрическая схема, чертеж многоугольника и т. д.

Отцом теории графов (так же как и топологии) является Эйлер, решивший в 1736 г. широко известную в то время задачу о мостах в городе Кенигсберге¹. Долгое время считалось, что теория графов применяется главным образом при решении головоломок и занимательных логических задач, да и сама она рассматривалась лишь как одна из частей геометрии. Однако в XX в. были найдены широкие приложения теории графов не только в математике, но и в экономике, биологии, химии, электронике, сетевом планировании и других областях науки и техники. В результате она стала бурно развиваться и превратилась в самостоятельную разветвленную теорию.

Идея решения логических задач, описанная в § 2.3, может быть реализована с использованием графов. С этой целью у двух или более множеств, участвующих в условии задачи, соединяются сплошной линией элементы, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие, и пунктирной линией, если такое соответствие отсутствует.

¹ Ныне г. Калининград.

Этот способ в отдельных случаях является более наглядным и эффективным, чем построение таблиц. Его изучение начнем с рассмотрения задач на соответствие между двумя множествами. По существу это те же задачи, которые мы в § 2.3 решали с помощью таблиц.

Пример 2.24. Беседуют трое: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас белокурый, другой — брюнет, а третий — рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из собеседников?

Решение. Изобразим множество фамилий $M = \{Б, Ч, Р\}$ и множество цветов волос $N = \{бл, бр, р\}$ (рис. 2.10).

Так как по условию задачи цвет волос каждого не соответствует фамилии, то элементы $Б$ и $бл$, $Ч$ и $бр$, $Р$ и $р$ следует соединить пунктирными линиями. Далее известно, что Белокуров не брюнет, поэтому элемент $Б \in M$ следует соединить пунктирной линией с элементом $бр \in N$. Теперь ясно, что Белокуров — рыжий, а Чернов не рыжий, следовательно, элемент $Б \in M$ соединяется с элементом $р \in N$ сплошной линией, а элемент $Ч \in M$ соединяется с элементом $р \in N$ пунктирной линией. Так как Чернов не брюнет и не рыжий, то он блондин и, значит, Рыжов — брюнет.

Как и в случае задач, решаемых с помощью таблиц, здесь может встретиться ситуация, при которой между элементами множеств нет взаимно однозначного соответствия.

Аналогично решаются задачи, в условиях которых участвует больше двух множеств.

Пример 2.25. Три товарища — Алексей, Дмитрий и Степан ведут различные спортивные секции (хоккей, биатлон, фехтование) в школах Москвы, Новосибирска и Иркутска.

Известно, что: Алексей работает не в Москве, а Дмитрий не в Новосибирске; москвич обучает не фехтованию; тот, кто ведет хоккей, работает в Новосибирске; Дмитрий преподает не биатлон. Какую секцию и в каком городе ведет каждый из товарищей?

Решение. Для решения этой задачи выделим три множества: имен $\{А, Д, С\}$, городов $\{М, Н, И\}$ и предметов $\{х, б, ф\}$.

Проведем на рисунке сплошные и пунктирные линии, отвечающие условиям задачи. Графическое решение задачи будет иметь вид, изображенный на рисунке 2.11.

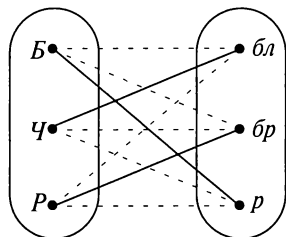


Рис. 2.10

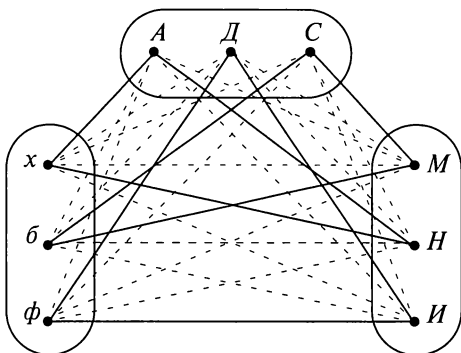


Рис. 2.11

Для получения ответа остается расшифровать буквы, стоящие в вершинах трех треугольников со сплошными сторонами.

О т в е т: Алексей ведет хоккейную секцию в Новосибирске, Дмитрий — фехтование в Иркутске, а Степан — биатлон в Москве.

Пример 2.26. Три подруги были в белом, красном и голубом платьях. Их туфли были тех же трех цветов. Только у Тамары цвет платья и туфель совпал. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвет платья и туфель каждой из подруг.

Р е ш е н и е. Изобразим на рисунке три множества: множество подруг $\{Т, В, Л\}$, множество их платьев $\{Б, К, Г\}$ и множество их туфель $\{б, к, г\}$ (рис. 2.12).

Проведем на рисунке сплошные и пунктирные линии, отвечающие условиям задачи.

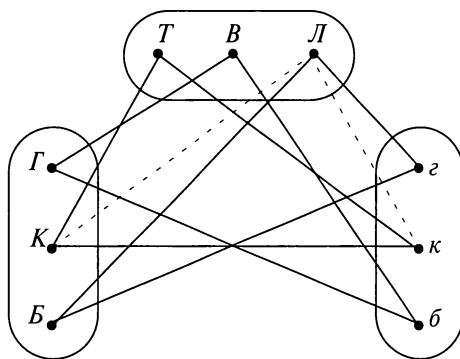


Рис. 2.12

Ответ должен получиться в виде трех треугольников со сплошными сторонами.

Теперь ясно, что у Лиды голубые туфли, у Тамары — красные туфли и, следовательно, красное платье. Далее, у Лиды — белое платье, у Вали — голубое.

О т в е т. Тамара — в красном платье и красных туфлях, Валя — в голубом платье и белых туфлях, Лида — в белом платье и голубых туфлях.

Пример 2.27. Пять учеников лица A, B, C, D, E участвовали в конкурсе. Учитель истории, хорошо знающий учеников, предсказал итог конкурса следующим образом: A, B, C, D, E . Учитель математики предсказал иной итог конкурса: D, A, E, C, B . Оказалось, что оба они ошиблись, причем учитель истории не назвал правильно ни одного места и ни одной пары учеников, которые по итогам конкурса следовали друг за другом. Учитель математики указал правильно места двух учеников, а также правильно назвал две пары учеников, следующих по итогам конкурса друг за другом. Каковы итоги конкурса?

Р е ш е н и е. Из условия задачи нам известны некоторые неправильные высказывания, например высказывания учителя истории о занятых учениками местах: $A_1 = 0, B_2 = 0, C_3 = 0, D_4 = 0, E_5 = 0$ (индекс означает, какое место в конкурсе занял ученик), а также высказывания о парах учеников, следующих друг за другом по итогам конкурса, которые вытекают из высказывания о занятых местах, а именно: $(AB) = 0, (BC) = 0, (CD) = 0, (DE) = 0$.

Среди высказываний учителя математики о занятых учениками местах $(D_1, A_2, E_3, C_4, B_5)$ два места названы правильно, также среди пар учеников, следующих по итогам конкурса друг за другом, а именно: $(DA), (AE), (EC), (CB)$ — две пары названы правильно. Всем этим мы и будем руководствоваться при построении графов.

В отличие от графов, построенных при решении предыдущих задач, граф, к построению которого мы приступаем, называется *деревом* — из-за его сходства с веткой дерева.

Начальную букву фамилии ученика и номер занятого им места будем изображать ребром графа, а вершина будет символизировать возможные разветвления от предыдущего места к последующему месту по итогам конкурса.

Так как ученик A не занял первого места, то граф не может начинаться с ребра A_1 , но может начинаться с любого из ребер B_1, C_1, D_1, E_1 . Чтобы иметь полное решение задачи, рассмотрим построение

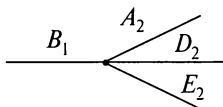


Рис. 2.13

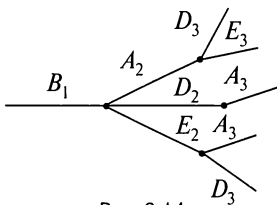


Рис. 2.14

четырёх графов. Напомним, что при построении графа нужно следить, чтобы не получались места и пары, отмеченные выше как невозможные.

1) Начинаем строить граф с ребра B_1 . Так как порядок следования (BC) невозможен, то на второе место нельзя поставить ученика C , но можно поставить ученика A или ученика D , или ученика E . Граф в первой вершине разветвляется на три ветки (рис. 2.13).

На третьем месте не может быть ученик C , а также невозможен порядок следования (DE). Поэтому после ребра A_2 возможно разветвление графа в ребра D_3 и E_3 ; после D_2 возможно только продолжение ветки ребром A_3 , а после ребра E_2 также возможно разветвление ребрами A_3 и D_3 , что и показано на рисунке 2.14.

На четвертом месте не может быть ученик D , а также невозможен порядок следования (DE). Поэтому ветка $B_1A_2D_3$ графа даст только один росток — ребро C_4 . Точно так же ветки $B_1A_2E_3$, $B_1E_2A_3$ дадут по одному ростку — ребро C_4 . Ветки же $B_1D_2A_3$ и $B_1E_2D_3$ дадут по два разветвления: соответственно в ребра C_4 , E_4 и ребра C_4 , A_4 (рис. 2.15).

На пятом месте не может быть ученик E , а также невозможен порядок (CD). Поэтому четыре ветки графа из семи полученных не могут быть продолжены (в конце этих веток поставлены звездочки (рис. 2.16)).

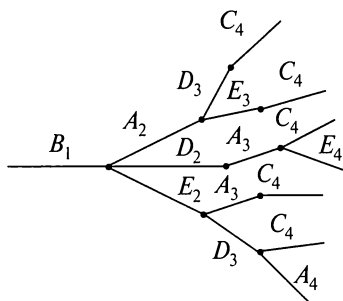


Рис. 2.15

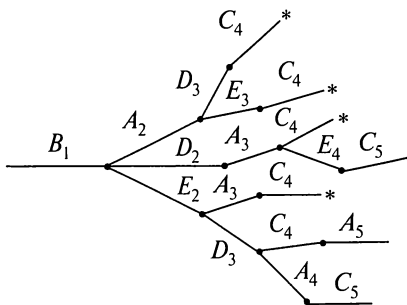


Рис. 2.16

Каждая из оставшихся веток дает по единственному продолжению.

Построенный граф дает три возможных распределения мест среди участников конкурса, удовлетворяющих предсказаниям учителя истории, но они еще не проверены на выполнение предсказаний учителя математики. Выпишем эти распределения мест:

а) B_1, D_2, A_3, E_4, C_5 ; б) B_1, E_2, D_3, C_4, A_5 ; в) B_1, E_2, D_3, A_4, C_5 .

Но ни одно из этих распределений мест не выдерживает испытания на распределение мест, предсказанное учителем математики, так как ни в одном из этих распределений нет двух мест, угаданных учителем математики. Следовательно, это построение графа решение задачи не дает.

2) В полной аналогии с тем, как было выполнено первое построение графа, строим граф, начинающийся с ребра C_1 , т. е. граф, построенный на предположении, что ученик C занял в конкурсе первое место.

Этот граф имеет только три завершенные ветки (рис. 2.17):

а) C_1, A_2, E_3, B_4, D_5 ; б) C_1, E_2, B_3, A_4, D_5 ; в) C_1, E_2, D_3, B_4, A_5 .

Но снова ни одно из этих распределений мест не выдерживает испытания на распределение мест, предсказанное учителем математики.

3) Построение графа начинаем с ребра D_1 , т. е. исходим из предположения, что ученик D занял в конкурсе первое место.

Как видим (рис. 2.18), полное развитие получили четыре ветки графа, а три другие ветки развитыми быть не могут. Этим построением графа мы нашли четыре распределения мест в итоге конкурса, согласующиеся с предсказанием учителя истории. Вот они:

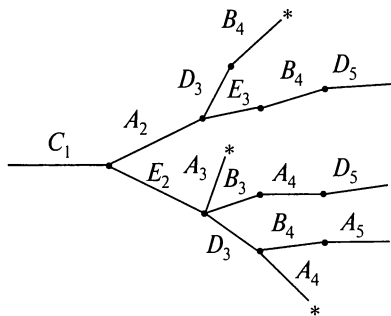


Рис. 2.17

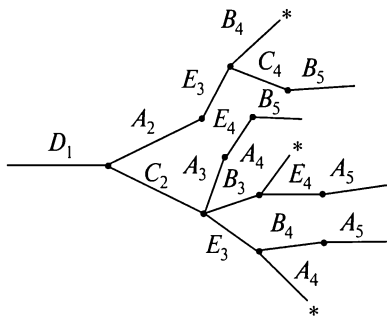


Рис. 2.18

а) D_1, A_2, E_3, C_4, B_5 ;в) D_1, C_2, B_3, E_4, A_5 ;б) D_1, C_2, A_3, E_4, B_5 ;г) D_1, C_2, E_3, B_4, A_5 .

Но и тут мы не получили решения задачи, так как ни одно из распределений мест не выдерживает испытания на распределение мест, предсказанное учителем математики. Решение задачи еще не найдено.

4) Последнее возможное построение графа начинаем с E_1 , т. е. с предположения, что ученик E занял в конкурсе первое место. В этом графе (рис. 2.19) полное развитие получили четыре ветки. Но только одна из этих веток удовлетворяет всем условиям задачи. Это ветка, дающая распределение мест E_1, D_2, A_3, C_4, B_5 . Угаданные учителем математики являются места C_4 и B_5 , а угаданные расположения пар являются пары (DA) и (CB) .

О т в е т. На первом месте был ученик E , на втором — D , на третьем — A , на четвертом — C и на пятом — B .

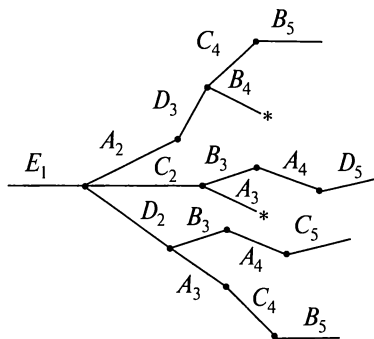


Рис. 2.19

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

2.83. Петр, Геннадий, Алексей и Владимир занимаются в одной детской спортивной школе в разных секциях: гимнастики, легкой атлетики, волейбола и баскетбола. Петр, Алексей и волейболист учатся в одном классе. Петр и Геннадий на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с волейболистом, ни с баскетболистом. Кто в какой секции занимается?

2.84. Футбольные команды пяти школ города участвуют в розыгрыше кубка. В финал кубка выходят две команды. До соревнований пять болельщиков высказали прогнозы, что в финал выйдут команды:

Б и Г; В и Д; Б и В; А и Г; Г и Д.

Один прогноз оказался полностью неверным, в остальных была правильно названа только одна из команд-финалистов. Какие команды вышли в финал?

2.85. Три товарища — Владимир, Игорь и Сергей — окончили один и тот же педагогический институт и преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Ярославля. Владимир работает не в Рязани, Игорь — не в Туле. Рязанец преподает не физику, Игорь — не математику, туляк преподает литературу. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из них?

- 2.86.** Среди офицеров *А*, *Б*, *В* и *Г* — майор, капитан и два лейтенанта. *А* и один из лейтенантов — танкисты, *Б* и капитан — артиллеристы; *А* младше по званию, чем *В*. Определите род войск и воинское звание каждого из них.
- 2.87.** В поезде, который идет из Москвы в Санкт-Петербург, едут пассажирами Иванов, Петров и Сидоров. В поездной бригаде такие же фамилии у машиниста, бригадира поезда и одного из проводников. Известно, что:
- пассажир Иванов живет в Москве;
 - проводник живет на полпути между Санкт-Петербургом и Москвой;
 - пассажир однофамилец проводника живет в Санкт-Петербурге;
 - ближайший по месту проживания проводника пассажир зарабатывает ровно вдвое больше, чем проводник;
 - пассажир Петров зарабатывает 2000 рублей в месяц;
 - Сидоров (из поездной бригады) выиграл у бригадира партию в шахматы.
- Как фамилия у машиниста?
- 2.88.** Четыре студента разных факультетов нашего университета организовали инструментальный ансамбль. Михаил играет в нем на саксофоне. Пианист учится на физическом факультете. Ударника зовут не Валентин, а студента географического факультета — не Леонид. Михаил учится не на историческом факультете. Андрей не пианист и не биолог. Валентин учится не на физическом факультете, а ударник — не на историческом. Леонид играет не на контрабасе. На каком инструменте играет и на каком факультете учится Валентин?
- 2.89.** В одном из иркутских институтов на разных курсах учатся четыре товарища. Самый младший из них на первом курсе, а старший — на четвертом. Определите имя и фамилию каждого студента и курс, на котором он учился, если известно, что:
- Борис — персональный стипендиат;
 - Василий должен будет летом ехать на практику в Бодайбо, а Иванов собирается ехать отдыхать домой к родителям в Черемхово;
 - Николай курсом старше Петра;
 - Борис и Орлов — коренные иркутяне;
 - Крылов в прошлом году окончил школу, а сейчас учится на том же факультете, где учится Карпов;
 - Борис иногда пользуется прошлогодними конспектами Василия.
- 2.90.** Четверо друзей, владельцы моторных лодок, решили провести гонки из четырех заездов, меняясь в каждом заезде лодками. В первом заезде Борис был на лодке Виктора, а во втором Виктор плыл на лодке Олега. Петр выиграл третий заезд на своей лодке «Мотылек», причем он выиграл и все остальные заезды. На «Колибри» во втором заезде плыл Олег, а в четвертом заезде плыл Борис. В четвертом заезде «Колибри» пришла второй после «Стрижа». Кому принадлежит лодка «Шмель»?
- 2.91.** В одной школе уроки по биологии, географии, английскому языку, французскому языку, истории и математике ведут три учителя: Морозов, Васильев и Токарев. Каждый из них преподает по два предмета.

Учитель географии и учитель французского языка — соседи по дому. Морозов самый младший из троих. Все трое — Токарев, учитель биологии и учитель французского языка — ездят вместе из школы. Учитель биологии старше учителя математики. В свободное время, если им удастся найти четвертого партнера, учитель английского языка, учитель математики и Морозов обычно играют в преферанс. Кто какие предметы преподает?

- 2.92. В шахматном турнире принимали участие шесть партнеров различных профессий: токарь, слесарь, инженер, учитель, врач и шофер.

Известно, что:

- 1) в первом туре Андреев играл с врачом, учитель — с Борисовым, а Григорьев — с Евдокимовым;
- 2) во втором туре Дмитриев играл с токарем, а врач — с Борисовым;
- 3) во втором туре Евдокимов играл с инженером;
- 4) по окончании турнира места распределились так: Борисов — первое место, Григорьев и инженер поделили второе и третье места, Дмитриев занял четвертое место, а Золотарев и слесарь поделили пятое и шестое места.

Определите профессию каждого.

- 2.93. В городе три футбольные команды: «Звезда», «Салют» и «Победа». Смирнов, Родин и Егоров — вратари этих команд.

Однажды в день состязаний все они находились на стадионе. В первой половине игры Смирнов оказался в крайне невыгодном положении: солнце светило ему в глаза, и он едва не пропустил мяч. Дул сильный ветер, сорвавший шляпу с головы вратаря «Салюта». В первой половине игры счет открыт не был. Но вот свисток судьи возвестил о начале второго тайма. Вскоре радиокомментатор, находившийся на западной трибуне, сообщил: «Слева от меня, у ворот «Звезды», опасный прорыв! Удар! Еще удар! Вратарь делает отчаянный бросок. Поздно! Мяч в воротах «Звезды!» Счет 1 : 0 так и не изменился до конца матча. После игры Егоров подошел к вратарю проигравшей команды и указал на его ошибки.

В какой команде играет каждый из названных вратарей?

- 2.94. Как-то раз случай свел в одном купе писателя-историка, поэта, прозаика и драматурга. Это были Алексеев, Борисов, Константинов и Дмитриев. Оказалось, что каждый из них взял с собой книгу, написанную одним из пассажиров. Алексеев и Борисов, дочитав каждый свою книгу, условились на завтра обменяться ими. Поэт читал пьесу. Прозаик, очень молодой человек, выпустивший свою первую книгу, говорил, что он в жизни не читал и не читает ничего по истории. Борисов купил одно из произведений Дмитриева. Никто из пассажиров не покупал и не читал книгу, написанную им самим.

Что читал каждый из них? Кто кем был?

- 2.95. В 1918 г. закончилась первая мировая война. В день подписания мирного договора три супружеские пары собрались, чтобы отпраздновать это событие за праздничным столом. Каждый муж доводился братом одной из жен, а каждая жена была сестрой одного из мужей, т. е.

среди присутствующих можно было указать три родственные пары «брат с сестрой». Элен ровно на 26 недель старше своего мужа, который родился в августе. Сестра м-ра Уайта замужем за свояком брата Элен и вышла за него замуж в день своего рождения, в январе. Маргарет Уайт ростом ниже Уильяма Блэка. Сестра Артура красивее, чем Бетатрис. Джону исполнилось 50 лет. Как зовут миссис Браун?

2.96. В одном городе живут пять человек. Их имена Леонид, Михаил, Николай, Олег и Петр. Их фамилии Атаров, Бартенев, Кленов, Данилин и Иванов. Бартенев знаком только с двумя из перечисленных мужчин. Петр знаком со всеми, кроме одного. Леонид знает только одного из всех. Данилин и Михаил незнакомы. Николай и Иванов знают друг друга. Михаил, Николай и Олег знакомы между собой. Атаров знаком только с одним из всех. Только один из всех знаком с Кленовым. Назовите имена и фамилии каждого и кто с кем знаком.

2.97. В одном городе живут семь любителей птиц. И фамилии у них птичьи. Каждый из них — «тезка» птицы, которой владеет один из его товарищей. У троих из них живут птицы, окрас которых темнее, чем пернатые «тезки» их хозяев. «Тезка» птицы, которая живет у Воронова, женат. Голубев и Канарейкин — единственные холостяки из всей компании. Хозяин грача женат на сестре жены Чайкина. Невеста хозяина ворона очень не любит птицу, с которой возится ее жених. «Тезка» птицы, которая живет у Грачева, — хозяин канарейки. Птица, которая является «тезкой» владельца попугая, принадлежит «тезке» той птицы, которой владеет Воронов. У голубя и попугая оперение светлое. Кому принадлежит скворец?

2.98. В одной дивизии служили пять офицеров: генерал, полковник, майор, капитан и лейтенант. Один из них сапер, другой — пехотинец, третий — танкист, четвертый — связист, а пятый — артиллерист. У каждого из них есть сестра и каждый женат на сестре своего однополчанина. Вот что о них известно. По меньшей мере, один из родственников связиста старше его по званию. Капитан никогда не служил в Нижнем Новгороде. Оба родственника пехотинца и оба родственника танкиста служили раньше в Санкт-Петербурге. Ни один родственник генерала в Санкт-Петербурге не был. Танкист служил в Иркутске вместе с обоими своими родственниками, а лейтенант там не служил. Полковник служил в Екатеринбурге вместе со своими родственниками. Танкист не служил в Екатеринбурге. Там служил только один из его родственников. Генерал служил с обоими своими родственниками в Нижнем Новгороде, а в Екатеринбурге он не бывал. Артиллерист не служил ни в Нижнем Новгороде, ни в Иркутске. Кто из офицеров какое звание имеет?

2.99. Несколько команд разыграли первенство по волейболу, сыграв каждая с каждой по одному разу. Докажите, что если какие-нибудь две команды одержали одинаковое число побед, то найдутся такие три команды A , B и C , что A выиграла у B , B у C и C у A .

У к а з а н и е. При игре в волейбол нет ничьих.

§ 3.1. Истинные и ложные утверждения

Рассмотрим класс задач, условие которых строится по следующему принципу: имеется группа людей, каждый из представителей которой высказал одно или несколько утверждений, и известно, что часть из этих утверждений истинна, а часть — ложна. Требуется установить, какое утверждение является истинным.

Наиболее простыми являются задачи, где каждый представитель высказал по два утверждения и известно, что одно — истинно, а другое — ложно. В этом случае берется одно из двух утверждений одного из членов группы и предполагается, что оно истинно. Если при рассмотрении утверждений других членов группы не получаем противоречия, то мы приходим непосредственно к решению задачи. Если же мы пришли к противоречию, то взятое нами утверждение является ложным и, следовательно, истинным является второе его утверждение.

Пример 3.1. Четыре спортсменки: Аня, Валя, Галя и Даша — заняли первые четыре места в соревновании по гимнастике, причем никакие две из них не делили между собой эти места. На вопрос: «Какое место заняла каждая из них?», трое болельщиков ответили:

А: «Аня — второе место, Даша — третье место».

Б: «Аня — первое место, Валя — второе место».

В: «Галя — второе место, Даша — четвертое место».

Оказалось, что каждый из болельщиков ошибся один раз. Какое место заняла каждая из спортсменок?

Решение. Предположим, что *А* был прав в своем первом утверждении. Тогда Аня заняла второе место, а Даша — не третье. При этом первое утверждение *Б* не верно, а верно его второе утверждение. Мы пришли к противоречию: Аня и Валя обе заняли второе место. Следовательно, Аня не заняла второе место, а Даша заняла третье место. При этом из высказываний *В* следует, что Галя заняла второе место (Даша не может занять четвертое место), а из высказываний *Б* следует, что Аня заняла первое место (Валя не может занять второе место).

О т в е т. Аня заняла первое место, Галя — второе, Даша — третье, Валя — четвертое.

В более сложных случаях формулировки рассматриваемых задач не указывают, являются ли высказывания конкретного представителя группы истинными или ложными. При этом известно лишь общее число истинных и ложных высказываний и требуется установить, какие из них являются истинными. Чаще всего это удается сделать путем перебора предположений об истинности одной части высказываний и ложности остальных высказываний. Если предположения такого рода не приводят к противоречию, то приходим к решению задачи.

Пример 3.2. Один из пяти гномов разбил окно.

Нори сказал: «Это или Фили, или Кили».

Фили сказал: «Это сделал не я и не Ори».

Кили сказал: «Вы оба говорите неправду».

Дори сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой неправду».

Ори сказал: «Нет, Дори, ты не прав».

Хоббит Бильбо Бэггинс, которому, конечно, можно доверять, уверен, что не менее трех гномов сказали правду. Кто разбил окно?

Р е ш е н и е. Установим имена гномов, сказавших правду.

1) Пусть правду сказал Кили, тогда неправду сказали Нори, Фили (Кили сказал, что они говорят неправду) и Дори, который возражает Кили. Таким образом, сказавших неправду будет больше двух, а это противоречит условию задачи. Следовательно, Кили говорит неправду.

2) Предположим, что Дори говорит правду, тогда неправду сказали Кили и один из первых гномов (это утверждает Дори), а также Ори, который возражает Дори. Вновь приходим к противоречию, следовательно, Дори сказал неправду. Таким образом, правду сказали Нори, Фили и Ори. Но из высказываний Нори и Фили следует, что окно разбил Кили.

Пример 3.3. Богини Гера, Афродита и Афина пришли к юному Парису, чтобы тот установил, кто из них прекраснее всех. Они высказали следующие утверждения.

Афродита: «Я самая прекрасная».

Гера: «Я самая прекрасная».

Афина: «Афродита не самая прекрасная».

Афродита: «Гера не самая прекрасная».

Афина: «Я самая прекрасная».

Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух остальных ложны. Считая это предположение истинным, определите, кто прекраснейшая из богинь.

Решение. Рассмотрим три возможности.

1) Пусть прекраснейшей из богинь является Гера. Тогда ее высказывание истинно, а все утверждения двух других богинь ложны. Но, с другой стороны, получилось, что первое утверждение Афины истинно. Мы пришли к противоречию.

2) Пусть прекраснейшая из богинь — Афина. Тогда оба ее утверждения истинны, а все утверждения двух других ложны. Но это противоречит тому, что второе утверждение Афродиты оказалось истинным.

3) Если прекраснейшая из богинь — Афродита, то оба ее утверждения истинны, а все остальные ложны. Здесь противоречия нет.

Ответ. Афродита.

Пример 3.4. Андрей и Борис разговаривали о предстоящей контрольной работе по математике.

Андрей сказал: «Если я справлюсь с работой, то ты с ней тоже справишься».

Борис ответил: «А если я не справлюсь с работой, то и ты с ней не справишься».

Доказать, что во время этого разговора или оба говорят правду, или оба лгут.

Решение. Обозначим через A утверждение «Андрей справится с работой», а через B — утверждение «Борис справится с работой».

Тогда Андрей сказал: «Если A истинно, то B истинно». Короче: «Если A , то B », или в символической записи: $A \Rightarrow B$.

Аналогично Борис сказал: «Если B ложно, то A ложно». Короче: «Если \bar{B} , то \bar{A} », или в символической записи: $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, где через \bar{A} обозначено отрицание утверждения A .

Пусть предложение $A \Rightarrow B$ истинно. Верно ли, что тогда и предложение $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ истинно?

Допустим, что утверждение \bar{B} истинно, т. е. B ложно. Но тогда и A ложно, так как если бы A было истинно, то на основании истинности предложения $A \Rightarrow B$ получилось бы, что и B истинно, — противоречие.

Итак, из истинности предложения $A \Rightarrow B$ следует истинность предложения $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. Аналогично доказывается, что из истинности предложения $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, следует истинность предложения $B \Rightarrow A$; в конце концов, этот случай отличается от предыдущего только обозначениями. Наконец, отсюда автоматически вытекает, что из ложности любого из этих двух предложений следует ложность другого.

Фактически здесь мы доказали, независимо от содержания данной задачи, что *предложения $A \Rightarrow B$ и $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ равносильны*. Символическая запись этого предложения:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}).$$

Таким образом, для того чтобы из данного предложения, имеющего условие и заключение, получить равносильное ему предложение, нужно поменять в нем местами условие и заключение и в полученном предложении условие и заключение заменить их отрицаниями.

Это утверждение называется *законом контрапозиции*.

Пример 3.5. Найти натуральные числа a и b , если из четырех утверждений:

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| 1) $a - b$ делится на 3; | 3) $a = 4b - 1$; |
| 2) $a + 2b$ — простое число; | 4) $a + 7$ делится на b |

три истинны, а одно ложно. Найти все решения.

Решение. Будем искать среди данных утверждений ложное. Для этого хорошо было бы найти два несовместимых утверждения.

Первое и второе утверждения не могут быть одновременно истинными, так как если число $a - b$ делится на 3, то и число $a + 2b = (a - b) + 3b$ делится на 3, а значит, не является простым. Кроме того, несовместимы первое и третье утверждения, поскольку если $a = 4b - 1$, то число $a - b = (4b - 1) - b = 3b - 1$ не может делиться на 3.

Так как в обоих случаях в парах несовместимых утверждений встречается первое утверждение, то оно и является ложным. Следовательно, второе, третье и четвертое утверждения истинны. Воспользуемся этим для нахождения b . Применим третье и четвертое утверждения. Сумма

$$a + 7 = (4b - 1) + 7 = 4b + 6$$

должна делиться на b , откуда 6 делится на b . В таком случае

$$b \in \{1; 2; 3; 6\}.$$

Переберем все четыре случая, учитывая, что сумма

$$a + 2b = (4b - 1) + 2b = 6b - 1$$

есть число простое. Подходят $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ и $b_3 = 3$. Найдем еще соответствующие значения a по формуле $a = 4b - 1$.

О т в е т. (3; 1), (7; 2), (11; 3).

Пример 3.6. Найти все числа a , если среди трех утверждений:

1) a — целое; 2) $a^2 - 3a$ — целое отрицательное; 3) $a + \frac{1}{a}$ — натуральное число, — два истинны, а одно ложно.

Решение. Первое и третье утверждения не могут быть одновременно истинными, поскольку это возможно только при $a = 1$, а тогда истинно еще и второе утверждение. Следовательно, одно и только одно из этих двух утверждений ложно, откуда второе утверждение истинно. Воспользуемся истинностью второго утверждения. Для этого решим уравнение $a^2 - 3a = -n$, где n — натуральное число:

$$a^2 - 3a = -n, a^2 - 3a + n = 0, a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4n}}{2}.$$

Здесь должно выполняться неравенство $9 - 4n \geq 0$, т. е. $n \leq 2\frac{1}{4}$.

Последнему неравенству из натуральных n удовлетворяют лишь $n = 1$ и $n = 2$. При $n = 2$ получаем $a_1 = 2$, $a_2 = 1$.

Если $a = 2$, то первое утверждение истинно, а третье ложно, что соответствует условиям задачи. Случай $a = 1$, как мы видели, отпадает. Положим теперь в формуле корней квадратного уравнения $n = 1$:

$$a_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

В этом случае первое утверждение ложно. Проверим, является ли истинным третье утверждение, например, при $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$:

$$a + \frac{1}{a} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5})^2 + 4}{2(3 + \sqrt{5})} = \frac{18 + 6\sqrt{5}}{2(3 + \sqrt{5})} = \frac{6(3 + \sqrt{5})}{2(3 + \sqrt{5})} = 3.$$

Получилось, что третье утверждение при $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ истинно.

Аналогично доказывается, что и при $a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ оно истинно.

О т в е т. 2; $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Пример 3.7. Даны три утверждения:

- 1) уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$ не имеет корней (действительных);
- 2) справедливо равенство $|a - 2| = 2 - a$;
- 3) система уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 = a, \\ x - \sin^2 y = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Найти все значения a , при которых два из этих утверждений истинны, а одно ложно.

Решение. Первое утверждение истинно, если $a^2 - 4 < 0$, т. е. при $-2 < a < 2$. Второе истинно, если $a \leq 2$.

Для того чтобы узнать, когда истинно третье утверждение, учтем, что на основании вида данной системы уравнений, если $(x_0; y_0)$ есть решение системы, то и $(x_0; -y_0)$ — ее решение. Так как система имеет единственное решение, то эти решения должны совпадать. Тогда $y_0 = -y_0$, откуда $y_0 = 0$. Полагая в системе $y = 0$, находим x : из первого уравнения $x = a$, а из второго $x = -3$. Значит, $a = -3$.

Выясним, справедливо ли обратное предположение: если $a = -3$, то система уравнений имеет единственное решение? При $a = -3$ она принимает вид

$$\begin{cases} x + y^2 = -3, \\ x - \sin^2 y = -3. \end{cases}$$

Тогда $x + y^2 = x - \sin^2 y$, $y^2 + \sin^2 y = 0$. Следовательно, $y = 0$, откуда $x = -3$.

Таким образом, третье утверждение истинно только при $a = -3$.

Выясним теперь, при каких значениях a истинны ровно два из трех данных утверждений.

Первое и второе утверждения истинны на пересечении $(-2; 2) \cap (-\infty; 2]$, т. е. на интервале $(-2; 2)$. Третье утверждение ложно.

Второе и третье утверждения истинны только при $a = -3$. В этом случае первое утверждение ложно.

Наконец, первое и третье утверждения не могут быть истинными при одних и тех же значениях a .

О т в е т. $-3, (-2; 2)$.

Пример 3.8. Даны следующие утверждения:

- 1) Джо ловкач;
- 2) Джо не везет;

- 3) Джо везет, но он не ловкач;
- 4) если Джо ловкач, то ему не везет;
- 5) Джо ловкач тогда и только тогда, когда ему везет;
- 6) либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно.

Каково наибольшее число утверждений из данных шести, которые могут быть одновременно истинными?

Р е ш е н и е. Третье утверждение несовместимо с первым, а также со вторым. Значит, среди первых трех утверждений имеется ложное. Так как число истинных утверждений из данных шести должно быть наибольшим из всех возможных, то число ложных утверждений должно быть наименьшим. В данном случае, для того чтобы среди трех первых утверждений было только одно ложное, достаточно считать ложным третье утверждение.

Пятое утверждение несовместимо с третьим, четвертым и шестым. По аналогичным причинам его и нужно считать ложным.

Итак, у нас два ложных утверждения — третье и пятое. Остаются первое, второе, четвертое и шестое утверждения. Нетрудно проверить, что они попарно совместимы между собой.

О т в е т. Четыре — первое, второе, четвертое и шестое.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- 3.1. Гном Кили произнес истинное утверждение. Гном Фили повторил его дословно, и оно стало ложным. Что сказал Кили? Укажите хотя бы одно такое утверждение.
- 3.2. Житель Великого Гусляра Александр Грубин заявил: «Все гуслярцы — лжецы». Истинно или ложно это утверждение?
- 3.3. Истинно или ложно утверждение: «Нет правила без исключения»?
У к а з а н и е. Данное утверждение также является правилом.
- 3.4. Однажды вечером в опустевшем лицее я нашел любопытную тетрадь. В ней было записано сорок следующих утверждений:
 - В этой тетради ровно одно неверное утверждение.
 - В этой тетради ровно два неверных утверждения.
 - В этой тетради ровно три неверных утверждения.
 - ...
 - В этой тетради ровно сорок неверных утверждений.Какое из этих утверждений верное?
- 3.5. Пользуясь законом контрапозиции, сформулируйте предложения, равносильные данным (и не совпадающие буквально с ними):
 - 1) если n — натуральное число, то $n \geq 1$;
 - 2) если n и k — натуральные числа и k делится на n , то $k \geq n$;

- 3) если $a < b$, то $a \leq b$;
- 4) если $x > 5$, то $x > 2$;
- 5) если $x < 3$, то $x < 6$;
- 6) если $a^2 + b^2 \neq 0$, то $a \neq 0$ или $b \neq 0$.

3.6. Пусть x , y , z и t — различные числа, которые являются элементами множества $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Найдите эти числа по следующим пяти условиям:

- 1) если $x \neq 1$, то $z \neq 2$;
- 2) если $y = 2$ или $y = 3$, то $x = 1$;
- 3) если $y \neq 3$, то $z = 4$;
- 4) если $t = 2$, то $y \neq 1$;
- 5) если $t \neq 1$, то $y = 1$.

3.7. О натуральном числе высказаны следующие утверждения:

- 1) оно четно;
- 2) это число 15;
- 3) оно простое;
- 4) это число 9.

Найдите число, если из четырех приведенных утверждений два истинны, а два ложны.

3.8. Найдите натуральные числа a и b , если из четырех утверждений:

- 1) $a + 1$ делится на b ;
- 2) $a = 2b + 5$;
- 3) $a + b$ делится на 3;
- 4) $a + 7b$ простое число

три истинны, а одно ложно. Укажите все решения.

3.9. Найдите все натуральные числа a , если из трех утверждений:

- 1) $a - 38$ есть точный квадрат (т. е. квадрат целого числа);
 - 2) последняя цифра a есть 1;
 - 3) $a + 51$ есть точный квадрат
- два истинны, а одно ложно.

3.10. О натуральном числе n высказаны следующие утверждения:

- 1) n делится на 3;
- 2) n делится на 5;
- 3) n делится на 9;
- 4) оно делится на 15;
- 5) оно делится на 25;
- 6) это число делится на 45.

Найдите все двузначные числа n , для которых три из этих утверждений истинны, а три ложны.

3.11. Даны два утверждения:

- 1) система уравнений

$$\begin{cases} (k+4)x + 3y = k+1, \\ kx + (k-1)y = k-1 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений;

- 2) прямые, заданные уравнениями $5x + 4y = 6$ и $kx + 6y = 10$, пересекаются во второй координатной четверти.

Найдите все значения k , при которых одно из этих утверждений истинно, а другое ложно.

3.12. Даны три утверждения:

- 1) неравенство $x^2 + x + a \geq 0$ справедливо при всех действительных значениях x ;
- 2) функция $y = \log_{2a} x$ является убывающей;

3) система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ y + \cos^2 y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Найдите все значения a , при которых два из этих утверждений истинны, а одно ложно.

3.13. Найдите все натуральные числа n , удовлетворяющие неравенству $980n \leq 1000$, для которых истинно одно и только одно из следующих утверждений:

- 1) n делится на 2;
- 2) n делится на 3;
- 3) n делится на 6;
- 4) n делится на 2, но не делится на 3;
- 5) n делится на 3, но не делится на 2;
- 6) n не делится ни на 2, ни на 3;
- 7) n делится на 5.

3.14. В гимназии, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-й, 8-й, 9-й и 10-й классы. При проверке оказалось, что 10-й класс плохо убран. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем.

Андреев: «Я убирал 9-й класс, а Савельев — 7-й».

Костин: «Я убирал 9-й класс, а Андреев — 8-й класс».

Савельев: «Я убирал 8-й класс, а Костин — 10-й класс».

Давыдов уже ушел домой.

Оказалось, что каждый ученик одну половину говорил правильно, а другую — неправильно. Какой класс убирал каждый ученик?

3.15. Пять школьников из пяти различных городов Иркутской области были для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: «Откуда Вы?» — каждый дал ответ.

Иванов: «Я приехал из Братска, а Дмитриев — из Нижнеудинска».

Сидоров: «Я приехал из Братска, а Петров — из Шелехова».

Петров: «Я приехал из Братска, а Дмитриев — из Ангарска».

Дмитриев: «Я приехал из Нижнеудинска, а Ефимов — из Саянска».

Ефимов: «Я приехал из Саянска, а Иванов живет в Ангарске».

Откуда приехал каждый из школьников, если одно его утверждение истинно, а другое ложно?

3.16. Четверо гуслярцев: Корнелий Удалов, Николай Ложкин, Михаил Стендаль и Николай Белосельский, готовясь к традиционному осеннему кроссу на призы газеты «Гуслярское знамя», соревновались в беге. После забега каждого из них спросили, какое он место занял. Были даны следующие ответы.

Удалов: «Я был ни первым, ни последним».

Стендаль: «Я не был первым».

Ложкин: «Я был первым».

Белосельский: «Я был последним».

Три из этих ответов правильные, а один неверный. Кто сказал неправду? Кто был первым?

- 3.17. По подозрению в совершенном преступлении задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой — малоизвестный чиновник, третий — известный мошенник. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом — ложь. Вот что они утверждали.

Браун: «Я совершил это. Джон не виноват».

Джон: «Браун не виноват. Преступление совершил Смит».

Смит: «Я не виноват, виновен Браун».

Определите имя старика, мошенника и виновника. Кто виноват?

- 3.18. Шесть учащихся: Алексеев, Гришин, Смирнов, Трешин, Кузин и Фетисов участвовали в школьной математической олимпиаде. Задачу решили двое. На вопрос: «Кто решил?» — участники олимпиады ответили: 1) Алексеев и Смирнов,
2) Гришин и Фетисов,
3) Фетисов и Алексеев,
4) Гришин и Кузин,
5) Трешин и Алексеев.

В четырех из этих ответов указан правильно один из победителей, в одном ответе оба указаны неправильно. Кто решил задачу?

- 3.19. Вернувшись с рыбной ловли, Корнелий Удалов, Саша Грубин и Коля Белосельский стали рассказывать во дворе дома о своих успехах.

Корнелий: «Коля поймал только две рыбы. Саша поймал на одну больше, чем Коля. Мы с Сашей поймали на восемь штук больше, чем Коля. Я наловил рыбы больше, чем Коля и Саша вместе».

Саша: «Коля наловил рыбы больше всех. Я поймал на три штуки больше, чем Корнелий. Коля ошибается, говоря, что я ничего не поймал. Корнелий и Коля наловили поровну».

Коля: «Саша не выудил ни одной рыбешки. Корнелий говорит неправду, что я поймал только две штуки. Мы с Корнелием наловили не поровну. Саша и Корнелий наловили вместе тринадцать штук».

Ничего не поделаешь, рыбаки, как и охотники, любят приврать. И каждый из рыболовов лишь два раза из четырех говорил правду. Сколько же на самом деле рыбы наловил каждый из этих гусярцев?

- 3.20. Один из трех гангстеров, известных в городе *М* под кличками Арчи, Босс и Весли, украл кейс с деньгами. На допросе каждый из них сделал три заявления.

Арчи: 1) Я не брал кейс.

2) В день кражи я уезжал из города *М*.

3) Кейс взял Весли.

Босс: 1) Кейс взял Весли.

2) Если бы я и взял его, я бы не сознался.

3) У меня и так много денег.

Если: 1) Я не брал кейс.

2) Я давно ищу хороший кейс.

3) Арчи прав, говоря, что он уезжал из *М*.

В ходе следствия выяснилось, что из трех заявлений каждого гангстера два верны, а одно неверно. Кто украл кейс?

3.21. Перед началом шахматного турнира болельщики обсуждали шансы сильнейших участников предстоящего состязания: Пешкина, Ладейникова, Королева и Слонова. Все сходились на том, что этой четверке обеспечены первые четыре места в турнирной таблице. А более подробные прогнозы болельщики предпочитали высказывать в несколько туманной форме. Вот что они говорили.

1) 1-й болельщик: «Все они наберут разное количество очков. Дележки мест в таблице не будет. Если Пешкин не займет первое место, то Королеву достанется лишь четвертое».

2) 2-й болельщик: «Если Король займет третье место, то Пешкин займет четвертое. Но у Пешкина положение в турнирной таблице должно быть лучше, чем у Слонова».

3) 3-й болельщик: «Если Ладейников не завоюет первое место, тогда Пешкин выйдет на третье место. А если Королеву удастся занять второе место, то Слонов, конечно, не будет на четвертом месте».

4) 4-й болельщик: «Если Король займет первое место, то вторым будет Слонов. А если Слонов не будет на втором месте, то и Ладейников не займет второго места».

И представьте себе, ни один из прогнозов не разошелся с истинным результатом матча. Кто какие места занял в турнирной таблице?

3.22. Дима, Гриша и Олег — лицеисты. Каждый из них увлекается тремя предметами из четырех: биология, химия, история, математика. Вот что они говорили о своих склонностях.

1) Гриша: «Дима — единственный из нас, кто любит историю. Олег и я увлекаемся одними и теми же предметами. Мы все считаем биологию интереснейшей наукой. Двое из нас любят и химию и биологию».

2) Олег: «Нам всем очень нравится математика. Гриша завзятый историк. В одном из научных увлечений мы расходимся с Димой. Гриша и Дима любят химию».

3) Дима: «Есть только один предмет, который любим мы все. Математикой увлекаюсь я один. Каждый из нас любит разное сочетание дисциплин. Олег ошибается, говоря, что Гриша и я увлекаемся химией».

Известно, что только два из утверждений каждого лицеиста соответствуют действительности. Попробуйте сказать, какими науками увлекается каждый из них?

3.23. В лицее учатся два брата-близнеца — Вася и Дима. Вася совершенно не может говорить правду по понедельникам, вторникам и средам, хотя в остальные дни он неизменно правдив. А Дима врет по вторникам,

четвергам и субботам, но в другие дни он говорит только правду. Как-то я повстречал братьев и спросил одного из них:

— Скажи, пожалуйста, как тебя зовут?

Тот без малейшего колебания ответил:

— Вася.

— А какой сегодня день недели? — продолжал я расспросы.

— Вчера было воскресенье, — сказал мой собеседник.

— А завтра будет пятница, — добавил его брат.

— Подожди, как же так? — изумился я, обращаясь к брату моего собеседника. — Ты уверен, что говоришь правду?

— Я всегда говорю правду по средам, — услышал я в ответ.

Решив, что говорить больше не о чем, братья пошли дальше, оставив меня в полном недоумении. Но, подумав, я все-таки сообразил, кто из двух братьев был Вася, а кто — Дима. Между прочим, по разговору можно установить и день недели, в который я встретился с ними. Попробуйте сообразить и вы.

3.24. Найдите все такие двузначные числа a , для каждого из которых два из следующих четырех утверждений верны, а два — неверны:

1) a делится на 5;

3) $a + 7$ есть точный квадрат;

2) a делится на 23;

4) $a - 10$ есть точный квадрат.

§ 3.2. Правдолюбцы и лжецы

Большинство задач такого типа строится по принципу: имеются три группы людей. Будем называть *правдолюбцами* тех людей, которые всегда говорят только правду, *лжецами* — тех, которые всегда только лгут, и *хитрецами* — тех, кто иногда говорит правду, а иногда лжет. Имеется ряд высказываний представителей этих групп. По их высказываниям требуется определить, к какой группе людей относится автор каждого высказывания.

Пример 3.9. На острове Логика живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал проводника узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал, что туземец говорит, что он абориген. Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

Решение. Задача этого вида строится на том, что ответ встреченного островитянина мог быть только один: «Я — абориген», так как этот ответ является правдой для аборигена и ложью для при-

шельца. Следовательно, проводник сказал правду и поэтому он принадлежит к аборигенам.

Пример 3.10. Один человек является правдолюбцем, но когда ему дважды задали один и тот же вопрос, он дал на него разные ответы. Укажите хотя бы один такой вопрос.

Решение. Подойдет любой вопрос, правильный ответ на который меняется со временем.

Ответ. Например: «Сколько сейчас времени?»

Пример 3.11. Один человек является правдолюбцем, другой — лжецом. Найдите хотя бы один вопрос, который нужно задать каждому из них, чтобы они дали на него одинаковые ответы.

Решение. А здесь вопрос должен относиться к сущности данных людей. Скажем, можно обоим задать вопрос: «Кто вы — правдолюбец или лжец?» Не только правдолюбец, но и лжец ответит: «Правдолюбец».

Пример 3.12. На острове Логика две деревни *A* и *B*. Жители *A* — правдолюбцы, жители *B* — лжецы. Жители *A* бывают в *B*, а жители *B* бывают в *A*. Приезжий встретил человека в одной из этих деревень и хочет выяснить, в какой деревне он находится. Как он может узнать это у встреченного им островитянина:

1) за два вопроса; 2) за один вопрос?

Решение. 1) За два вопроса это сделать легко. С помощью первого вопроса приезжий должен узнать, кто перед ним, правдолюбец или лжец (см. задачу 3.25). Второй вопрос может быть прямым: «Это деревня *A*?» В зависимости от того, кем оказался этот человек, приезжему следует верить или не верить его ответу на второй вопрос.

2) Сложнее выяснить истину за один вопрос. Подойдет, например, такой вопрос: «Вы живете в этой деревне?» Если встреча произошла в *A*, и правдолюбец, и лжец ответят «Да», а если в *B*, то оба ответят «Нет». Но тогда справедливы и обратные утверждения: если приезжему ответили «Да», то это деревня *A*, а если «Нет», то деревня *B*.

Пример 3.13. На острове Логика местный житель *K* говорит о себе и другом жителе *M* острова: «По меньшей мере один из нас лжец». Кем являются *K* и *M*?

Решение. Пусть K — лжец, тогда его утверждение ложно, а значит, K и M — правдолюбцы. Получили противоречие. Следовательно, K — правдолюбец и его утверждение истинно, откуда M — лжец.

Пример 3.14. Из трех жителей K , M и P острова Логика двое сказали следующее.

K : «Мы все лжецы».

M : «Один из нас правдолюбец».

Кто из жителей K , M и P правдолюбец и кто лжец?

Решение. Если бы K был правдолюбцем, то на основании его утверждения все трое островитян, в том числе и K , были бы лжецами, а это противоречит нашему допущению. Следовательно, K — лжец. Так как его утверждение ложно, то среди M и P имеется правдолюбец.

Перейдем к M . Если бы он был лжецом, то на основании предыдущего P — правдолюбец. Тогда утверждение M истинно, а это невозможно по допущению. Следовательно, M — правдолюбец. Так как утверждение M истинно, то P — лжец.

Ответ. K и P — лжецы, M — правдолюбец.

Пример 3.15. Из трех жителей K , M и P отдаленного района один является правдолюбцем, другой — лжецом, третий — хитрецом. Они высказали следующие утверждения.

K : «Я хитрец».

M : «Это правда».

P : «Я не хитрец».

Кем в действительности являются K , M и P ?

Решение. Сначала займемся K . Он не может быть правдолюбцем в силу его утверждения. Рассмотрим два случая.

1) Пусть K — хитрец. Тогда M — правдолюбец на основании его утверждения, а значит, P — лжец. Но в этом случае утверждение P истинно, что невозможно.

2) Пусть K — лжец. Так как утверждение M оказалось ложным, то M — хитрец. Следовательно, P является правдолюбцем, а это соответствует истинности его утверждения.

Ответ. K — лжец, M — хитрец, P — правдолюбец.

Пример 3.16. На острове Трисельске — три деревни: Правдино, Чередово и Лгуново. Известно, что жители первой дерев-

ни — правдолюбцы, жители третьей деревни — лжецы, а жители второй деревни — хитрецы, но с причудой: одно из любых двух высказанных подряд ими утверждений истинно, а другое ложно. Жители каждой деревни бывают в двух других деревнях. Однажды в пожарной части острова, где дежурный читал увлекательный роман, раздался телефонный звонок.

— Скорее приезжайте к нам! У нас в деревне пожар! — услышал он.

— В какой деревне?

— В Чередово, — был ответ.

Нужно ли посылать пожарную команду и в какую деревню?

Решение. Рассмотрим три возможности.

1) Пусть звонил правдолюбец. Но это противоречит тому, что звонивший называет своей деревню Чередово.

2) Если звонил лжец, то утверждение: «У нас в деревне пожар» — ложно.

3) Допустим, что звонил хитрец. В этом случае его последнее утверждение, согласно которому он называет своей Чередово, истинно. Но тогда его предыдущее утверждение: «У нас в деревне пожар» — ложно.

Получилось, что дежурный не должен посылать пожарную команду ни в одну из трех деревень.

Ответ. Продолжать читать роман дальше.

Пример 3.17. Однажды в одной комнате находилось несколько жителей острова Логика. Трое из них сказали следующее.

— Нас тут не больше трех человек. Все мы — лжецы.

— Нас тут не больше четырех человек. Не все мы лжецы.

— Нас тут пятеро. Трое из нас лжецы.

Сколько в комнате человек и сколько среди них лжецов?

Решение. Займемся первым из трех говоривших людей. Допустим, что он является правдолюбцем. Но тогда оба его высказывания, в частности второе: «Все мы — лжецы», истинны, а значит, он является лжецом. Мы пришли к противоречию. Следовательно, он может быть только лжецом, и оба его высказывания ложны — в действительности в комнате больше трех человек и не все они лжецы.

Присмотримся к утверждениям второго человека. Его высказывание: «Не все мы лжецы», истинно, а значит, он является правдо-

любцем. Тогда в комнате находится не более четырех человек. Учитывая предыдущее, получаем, что их ровно четыре.

Так как утверждение третьего из говоривших: «Нас тут пятеро» — ложно, то он — лжец. Следовательно, в комнате находится не трое лжецов. Кроме того, в комнате по меньшей мере двое лжецов — первый и третий и число лжецов меньше четырех, поскольку среди присутствующих имеется правдолюбец. В таком случае их ровно два.

О т в е т. 4 человека, 2 лжеца.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- 3.25. На острове Логика путешественник встретил одного из местных жителей. Укажите хотя бы один вопрос, который он должен задать жителю для того, чтобы понять, кто он — правдолюбец или лжец.
- 3.26. На острове Логика путешественник вышел на развилку дорог, и ему нужно было спросить у проходящего мимо островитянина, какая дорога ведет в деревню. Отличить по внешнему виду лживого от правдивого он не мог. Путешественник задал только один вопрос и по ответу узнал, по какой дороге ему следует идти. Что он спросил?
- 3.27. На острове Логика житель K говорит о себе и другом местном жителе M : «Я лжец, а M не лжец». Кем являются K и M ?
- 3.28. Из трех жителей K , M и P острова Логика двое говорят следующее.
 K : «Мы все — лжецы».
 M : «Ровно один из нас лжец».
Кем является P — правдолюбцем или лжецом?
- 3.29. Двое людей K и M , о которых известно, что каждый из них — либо правдолюбец, либо лжец, либо хитрец, утверждают следующее.
 K : « M — правдолюбец».
 M : « K — не правдолюбец».
Докажите, что по меньшей мере один из них говорит правду и является хитрецом.
- 3.30. Корреспондент хочет взять интервью у четырех ученых A , B , C и K , о которых он знает, что трое из них правдолюбцы, а один — хитрец. Прежде чем брать интервью, корреспондент хотел бы узнать, кто из ученых хитрец. Как он может выяснить это за три вопроса?
- 3.31. На острове Трисельске путешественник встретился с островитянином в одной из трех деревень. Как за четыре вопроса он может выяснить, с кем разговаривает и в какой деревне находится?
- 3.32. На острове Логика однажды собрались четыре местных жителя, и между ними произошел такой разговор:
— По меньшей мере один из нас — лжец.
— По меньшей мере двое из нас — лжецы.

— По меньшей мере трое из нас — лжецы.

— Среди нас нет лжецов.

Кем является каждый из четверых — правдолюбом или лжецом?

- 3.33. Однажды 12 жителей острова Логика встали в круг и каждый из них заявил, что один из его соседей — правдолюбец, а другой — лжец. Сколько правдолюбцев и сколько лжецов могло быть среди этих 12 человек? Укажите все ответы.
- 3.34. В комнате находится 10 человек, часть из них — правдолюбцы, остальные — лжецы. Один из них сказал: «Здесь нет ни одного правдолюбца». Второй: «Здесь не более одного правдолюбца». Третий: «Здесь не более двух правдолюбцев». И т. д. Десятый: «Здесь не более девяти правдолюбцев». Сколько в действительности в комнате правдолюбцев?
- 3.35. В одной давно забытой стране был храм, где в один ряд были расположены статуи трех богов: правды, лжи и дипломатии, которые отвечали на вопросы верующих, причем бог правды всегда говорил правду, бог лжи — всегда ложь, а бог дипломатии — иногда правду, а иногда — ложь. Внешне статуи были похожи, и никто не знал, кто же бог правды, кто бог лжи и кто бог дипломатии. Поэтому верующим приходилось обращаться к жрецам, чтобы выяснить, что же в ответах богов является правдой. И вот однажды молодой крестьянин по прозвищу Простак пришел в храм с намерением узнать, какая статуя каким богом является. Он смиренно подошел к статуе, которая была расположена от него справа, и спросил ее: «Какой бог находится рядом с тобой?» Статуя ответила: «Бог правды». Тогда он обратился к статуе крайней слева и задал ей тот же вопрос. Статуя ответила: «Бог лжи». Тогда он обратился к статуе, стоящей в центре, и спросил: «Кто же ты?» — на что та ответила: «Бог дипломатии». «Теперь все ясно», — сказал себе Простак. Каким образом Простак разгадал тайну богов?
- 3.36. Жители города Правдин всегда говорили правду, а жители города Лгунов — всегда лгут. В одном из этих городов между командами этих городов состоялся футбольный матч. После матча рядом со стадионом, на котором он проводился, произошел следующий разговор.
А (обращаясь к Б и В): «Скажите, кто выиграл».
Б: «Г сказал, что их команда проиграла».
В: «Наша команда выиграла».
Г (саясь в автобус, идущий в другой город, и обращаясь к А): «Поедем вместе, мы же из одного города».
А: «Вы ошибаетесь, Г, я живу здесь. Это В из вашего города».
Кто из какого города, где проходил матч и какая команда выиграла?
- 3.37. Как-то раз на острове Трисельске приезжий встретился с пятью островитянами, которым он по характерным чертам дал следующие прозвища: Косоглаз, Борода, Алошек, Курнос и Длинноух. Желая узнать, в каких деревнях эти люди живут, приезжий попросил первых двух рассказать ему по порядку, кто из какой деревни родом.

Косоглаз ответил, что Борода чередовец, Курнос правдовец, Алошек также родом из Чередова, а Длинноух лгуновец.

Борода, однако, утверждал, что Косоглаз чередовец, Курнос из Лгунова, Алошек правдовец, а Длинноух из Чередова.

Можно ли из полученных ответов сделать верные выводы, о родной деревне каждого из пяти островитян?

- 3.38. Каждый из четырех гномов — Балин, Двалин, Кили и Фи́ли — либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Однажды хоббит Бильбо Бэггинс услышал такой разговор.

Балин (обращаясь к Двалину): «Ты врун!»

Кили (обращаясь к Балину): «Сам ты врун!»

Фи́ли (обращаясь к Кили): «Да оба они вруны, — и подумав, — впрочем, ты тоже».

Кто из этих гномов говорит правду?

§ 4.1. Турнирные задачи

Будем рассматривать логические задачи на определение результатов участников спортивных соревнований. В задачах этого класса обычно приводятся неполные данные об итогах проведенных спортивных встреч; требуется путем логических рассуждений получить недостающие данные и установить отношение порядка на множестве участников.

Учитывая некоторую специфику в каждом виде спорта, задачи этого раздела сгруппированы по видам спорта.

Естественно, что в большинстве случаев решению задачи способствует оформление турнирной таблицы по данным, приведенным в условии задачи, а затем по данным, полученным логическим путем. Конечно, решая задачу о шахматном или футбольном турнире, нужно знать основные положения о таких турнирах.

В шахматных турнирах победитель игры в партии получает одно очко, ничейный исход оценивается для каждого игрока в 0,5 очка, а проигравшему записывают нуль очков. Участники, набравшие одинаковое число очков, делят между собой соответствующие места, т. е. на множестве участников устанавливается отношение нестрогого порядка.

Если в шахматном турнире участвует n шахматистов, то турнирная таблица состоит из $n \times n$ клеток. Как пример изобразим таблицу шахматного турнира, в котором участвует пять шахматистов и первые буквы их фамилий: $A, B, B, Г, Д$ (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Игрок	A	B	B	$Г$	$Д$	Очки	Место
A	⊙						
B		⊙		1			
B			⊙				
$Г$		0		⊙			
$Д$					⊙		

Диагональные клетки таблицы или просто заштриховываются, или в них помещается какой-либо характерный значок, так как ни один участник турнира не играет сам с собой, и поэтому в диагональных клетках результаты встреч не отмечаются.

При фиксировании результата встречи, например, между участниками *Б* и *Г* при выигрыше *Б* в клетке на пересечении строки *Б* и столбца *Г* ставится 1, а в клетке на пересечении строки *Г* и столбца *Б* ставится 0 (см. табл. 4.1). В случае ничейного исхода встречи в указанных клетках записывается по 0,5.

Количество очков в каждой строке таблицы суммируется, и места в итоге турнира распределяются в соответствии с набранным количеством очков.

Пример 4.1. Шесть шахматистов *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* и *Е* сыграли в турнире в один круг (каждый сыграл друг с другом по одной партии). *А* все свои партии свел вничью, *Б* не проиграл ни одной партии, *В* выиграл у победителя турнира и сыграл вничью с *Д*, *Г* опередил *Д*, но отстал от *Е*. Кто сколько очков набрал?

Решение. Для удобства решения заполнять турнирную таблицу начнем с данных задачи, сформулированных в явном виде: во всех клетках, связанных с *А*, нужно поставить по 0,5 очка и отметить ничью в игре между *Б* и *Д* (табл. 4.2).

Установим победителя турнира. Это не *А* (по количеству очков), не *Б* (он не проиграл ни одной партии), не *В* (он выиграл у победителя), не *Г* (он отстал от *Е*) и не *Д* (его обогнал *Г*). Следовательно, победителем является *Е*, который по условию задачи проиграл *В*. Значит, в последней клетке горизонтали *В* нужно поставить 1, а в третьей клетке горизонтали *Е* поставить 0.

Таблица 4.2

Игрок	<i>А</i>	<i>Б</i>	<i>В</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>	<i>Е</i>	Очки	Место
<i>А</i>	⊙	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	2,5	
<i>Б</i>	0,5	⊙						
<i>В</i>	0,5		⊙		0,5			
<i>Г</i>	0,5			⊙				
<i>Д</i>	0,5		0,5		⊙			
<i>Е</i>	0,5					⊙		

Таблица 4.3

Игрок	<i>А</i>	<i>Б</i>	<i>В</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>	<i>Е</i>	Очки	Место
<i>А</i>	○	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	2,5	II—V
<i>Б</i>	0,5	○	0,5	0,5	0,5	0,5	2,5	II—V
<i>В</i>	0,5	0,5	○	0	0,5	1	2,5	II—V
<i>Г</i>	0,5	0,5	1	○	0,5	0	2,5	II—V
<i>Д</i>	0,5	0,5	0,5	0,5	○	0	2	VI
<i>Е</i>	0,5	0,5	0	1	1	○	3	I

Как сыграли *Е* и *Б*? *Б* не выиграл у *Е* (иначе у *Е* было бы 2,5 очка, и он не мог бы стать победителем). Но по условию задачи *Б* не проиграл *Е*. Значит, они сыграли вничью, и поэтому в соответствующие клетки нужно поставить по 0,5.

Чтобы *Е* был победителем, он должен набрать не меньше трех очков (т. е. больше, чем *А*), но тогда он выиграл у *Г* и *Д*, и поэтому в горизонтали *Е* в четвертой и пятой клетках следует поставить 1, а в шестой клетке горизонталей *Г* и *Д* — 0.

Перейдем к *Б*. С одной стороны, он набрал не более чем 2,5 очка, так как не является победителем турнира; с другой — не менее чем 2,5 очка, так как не проиграл ни одной партии. Значит, он набрал ровно 2,5 очка и все партии свел вничью. Таким образом, во всех клетках горизонтали и вертикали *Б* должно стоять 0,5.

Теперь ясно, что *В* проиграл *Г*; в противном случае у него будет больше чем 2,5 очка.

Так как *Г* обогнал *Д*, то *Д* не мог выиграть у *Г*, иначе у *Д* будет 2,5 очка, а у *Г* — 2 очка. Но и *Г* не мог выиграть у *Д*, иначе он догоняет победителя. Значит, *Г* и *Д* сыграли вничью.

Внося теперь в таблицу (табл. 4.3) данные и о выигрыше *В* и *Г*, и о ничейном результате между *Г* и *Д*, мы получим ответы на все вопросы, поставленные в задаче.

О т в е т. *Е* набрал 3 очка, *А*, *Б*, *В* и *Г* — по 2,5, *Д* — 2.

Пример 4.2. В финальном турнире играли пять шахматистов, причем *А* окончил все партии вничью, *Б* сыграл вничью с занявшими первое и последнее место, *В* проиграл *Б*, но зато сыграл вничью только одну партию, *Г* выиграл у *Д* и у занявшего IV место, *Д* не выиграл ни одной партии. Кто сколько очков набрал и какое место занял?

Решение. Как и при решении предыдущего примера будем заполнять турнирную таблицу.

По условию задачи в столбце и в строке участника турнира *А* мы должны поставить в каждой клетке по 0,5 очка. Далее, так как *В* проиграл *Д*, то в третьей клетке второй строки ставим 1, а во второй клетке третьей строки ставим 0. Так как *Г* выиграл у *Д*, то в пятой клетке четвертой строки ставим 1, а в четвертой клетке пятой строки — 0. Из условия задачи следует, что *А* набрал в турнире 2 очка, *Б* — не менее 2, *В* — не менее 0,5, но не более 2,5, *Г* — не менее 2,5 очков, а *Д* не более 1,5 очков. Из этого ясно, что *А* не мог занять первое и второе место (у него очков не больше, чем у *Б* и *Г*); он также не мог занять четвертое место (*Г* выиграл у занявшего четвертое место, а с *А* он сделал ничью). И, наконец, *А* не занимает пятого места (*Д* имеет меньше очков, чем *А*). Следовательно, *А* занял третье место.

Выясним, кто из игроков занял пятое место. Это не *А* (он на третьем месте), это не *Б* (он сыграл с занявшим третье место вничью), это не *В* (*Б* у *В* выиграл), это не *Г* (по количеству очков он на месте выше третьего). Следовательно, на пятом месте *Д*. Установим игрока, занявшего четвертое место. Так как *Г* выиграл у *Д* и у занявшего четвертое место (с *А* у *Г* ничья), то четвертое место занял либо *Б*, либо *В*. Но у *Б* очков не меньше, чем у *А*, и, следовательно, четвертое место занял *В*. Чтобы *В* опередил по очкам занявшего пятое место, нужно чтобы *В* выиграл у *Д*. Таким образом, остается выяснить, как сыграли *Б* и *Г* и какие места они заняли. Так как *Б* сыграл вничью с занявшим первое место, то он не на первом месте. Количество очков, набранное им, не менее 2,5, то есть он опередил *А* и поэтому *Б* на втором месте. Следовательно, на первом месте *Г* с суммой очков 3 (табл. 4.4).

Ответ. Первое место занял *Г*, второе — *Б*, третье — *А*, четвертое — *В*, пятое — *Д*.

Таблица 4.4

Игрок	<i>А</i>	<i>Б</i>	<i>В</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>	Очки	Место
<i>А</i>	⊙	0,5	0,5	0,5	0,5	2	III
<i>Б</i>	0,5	⊙	1	0,5	0,5	2,5	II
<i>В</i>	0,5	0	⊙	0	1	1,5	IV
<i>Г</i>	0,5	0,5	1	⊙	1	3	I
<i>Д</i>	0,5	0,5	0	0	⊙	1	V

Таблица 4.5

Команда	З	С	Д	А	Очки	Мячи	Место
«Зенит»	⊗		3 : 1		2		
«Спартак»		⊗					
«Динамо»	1 : 3		⊗		0		
«Авангард»				⊗			

Ниже считается, что в футбольном (хоккейном) турнире команда-победитель получает 2 очка. Ничейный исход оценивается для каждой команды в 1 очко, а поражение — в 0 очков. Поскольку при распределении мест в турнире в случае равенства очков у двух команд во внимание принимается разность забитых и пропущенных голов, то на множестве участников обычно устанавливается отношение строгого порядка.

Турнирная таблица футбольного или хоккейного турнира лишь незначительно отличается от шахматной таблицы.

Так, для футбольного турнира, в котором участвует четыре команды: «Зенит», «Спартак», «Динамо», «Авангард» — таблица будет иметь следующий вид (табл. 4.5).

В отличие от шахматной таблицы результат встреч обычно записывается в соответствующих клетках как соотношение забитых и пропущенных мячей. Конечно, в отдельных случаях могут представляться и очки.

Например, если команда «Зенит» выиграла у команды «Динамо» со счетом 3 : 1, то в клетке на пересечении строки «Зенит» и столбца «Динамо» записывается счет 3 : 1 (см. табл. 4.5), а в клетке на пересечении строки «Динамо» и столбца «Зенит» записывается счет 1 : 3 (или соответственно 2 и 0 очков).

Пример 4.3. В розыгрыше приза открытия футбольного сезона в один круг участвовало пять команд *А*, *Б*, *В*, *Г* и *Д*, которые заняли места в том же порядке, начиная с первого. Команда *А* не сделала ни одной ничьей, команда *Б* не проиграла ни одной встречи, команда *Г* не выиграла ни одной встречи. Все команды набрали разное количество очков. Как окончилась каждая встреча?

Решение. Чем окончилась встреча между командами *А* и *Б*? Так как команда *А* не сделала ни одной ничьей, а команда *Б* не

Таблица 4.6

Команда	А	Б	В	Г	Д	Очки	Место
А	⊗	0	2	2	2	6	I
Б	2	⊗	1	1	1	5	II
В	0	1	⊗	1	2	4	III
Г	0	1	1	⊗	1	3	IV
Д	0	1	0	1	⊗	2	V

проиграла ни одной встречи, то команда *Б* выиграла у *А*. Остальные встречи команда *А* выиграла, так как иначе она набрала бы менее 6 очков, т. е. не более 4 очков из 8 возможных, а следовательно, не была бы победительницей.

Поскольку команда *А* набрала 6 очков, то команды *Б*, *В*, *Г* и *Д* набрали соответственно не более 5, 4, 3 и 2 очков. При этом ни одна из них не могла набрать меньше соответственно 5, 4, 3 и 2 очков, так как иначе все пять команд вместе набрали бы менее $6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 20$ очков, в то время как они сыграли $\frac{5 \cdot 4}{2}$ встреч и, следовательно, набрали $\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$ очков.

Команда *Б* набрала 5 очков. Поскольку одну встречу — с *А* — эта команда выиграла и ни одной встречи не проиграла, то остальные три встречи — с командами *В*, *Г* и *Д* — она свела вничью.

Команда *Г* набрала 3 очка и не выиграла ни одной встречи. Так как она проиграла *А* и сделала ничью с *Б*, то с командами *В* и *Д* эта команда сыграла вничью.

Команда *В* набрала 4 очка. При этом она проиграла *А* и сделала ничью с *Б* и *Г*. Следовательно, команда *В* выиграла у *Д*.

Теперь можно заполнить турнирную таблицу (табл. 4.6), которая одновременно дает ответ на вопрос задачи.

Пример 4.4. В первенстве гимназии по футболу в один круг участвовало шесть команд. Наибольшее число очков в первенстве набрала одна команда. Может ли быть так, что она одержала меньше побед, чем любая другая команда?

О т в е т. Может (табл. 4.7).

Таблица 4.7

Команда	А	Б	В	Г	Д	Е	Очки	Место
А	⊗	1	1	1	1	2	6	I
Б	1	⊗	2	0	0	2	5	II—V
В	1	0	⊗	0	2	2	5	II—V
Г	1	2	2	⊗	0	0	5	II—V
Д	1	2	0	2	⊗	0	5	II—V
Е	0	0	0	2	2	⊗	4	VI

Пример 4.5. В лицее проводился традиционный математический бой. В нем участвовали три команды: «Альфа», «Бета» и «Гамма». По условиям каждая из соревнующихся команд должна была составить пять задач и дать их решать своим соперникам.

При подведении итогов выяснилось, что команда «Альфа» смогла решить только одну из задач, предложенных командой «Бета», и четыре задачи «Гаммы».

Команда «Бета» решила три задачи, предложенные «Гаммой», и две задачи «Альфы».

«Гамма» нашла решение всех пяти задач «Альфы», но не смогла решить ни одной задачи «Беты».

Общее место присуждалось по итогам двух конкурсов:

- 1) на сложность (трудность) составленных задач;
- 2) на умение решать задачи.

За первое место в каждом конкурсе присуждалось 2 балла, за второе — 1 балл; третье место не оценивалось.

Определить, сколько баллов получила каждая команда в обоих конкурсах и каково итоговое распределение мест.

Решение. Имеющиеся в условии данные представим в виде таблицы 4.8.

Из этой таблицы видно, что каждая из трех команд решила по пять задач, предложенных ей двумя другими командами. Поэтому во втором конкурсе (на умение решать задачи) всем командам следует присудить одинаковое количество баллов (ноль, один или два).

Задачи, составленные командой «Бета», были самые трудные. Команда «Альфа» решила одну из них, а команда «Гамма» ни одной. Значит, первое место в конкурсе на сложность составленных

Таблица 4.8

Команда	«Альфа»	«Бета»	«Гамма»
«Альфа»	⊗	1	4
«Бета»	2	⊗	3
«Гамма»	5	0	⊗

задач нужно присудить команде «Бета». Задачи команд «Альфа» и «Гамма» оказались одинаковой трудности. Команды-противники решили их по 7. Поэтому второе и третье места следует разделить между командами «Альфа» и «Гамма».

О т в е т. Первое место заняла команда «Бета», второе и третье места — «Альфа» и «Гамма».

Несколько иначе решаются задачи, связанные с соревнованием двух спортсменов. Здесь, как правило, нет необходимости составлять турнирную таблицу. Решение таких турнирных задач требует лишь не очень сложных арифметических подсчетов.

Покажем ход рассуждений в этом случае на следующем примере.

Пример 4.6. Иван и Антон произвели по пять выстрелов в одну мишень, попав в «5» один раз, в «7» два раза, в «8» один раз, в «9» два раза, в «10» два раза, в «11» один раз, в «12» один раз. Четырьмя последними выстрелами Иван выбил в 7 раз больше очков, чем первым. Последним выстрелом Антон выбил в 5 раз меньше очков, чем четырьмя первыми. Известно, что оба попали в круг «10». Кто из них попал в «12»?

Р е ш е н и е. Обозначим результат первого выстрела Ивана через a_1 , второго — a_2 , третьего — a_3 , четвертого — a_4 , пятого — a_5 . Тогда по условию задачи $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 7a_1$. Максимальное число очков, которое можно выбить четырьмя выстрелами $10 + 10 + 11 + 12 = 43$. Пусть $a_1 = 5$, тогда $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 35$. Пусть $a_1 = 7$, тогда $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 49$, но максимальное число очков 43. Значит, $a_1 = 5$. Одно из чисел a_2, a_3, a_4, a_5 равно 10, значит, на результат трех выстрелов приходится 25 очков. Иван не мог попасть в «12», так как в противном случае на два оставшихся выстрела приходилось бы 13 очков. А даже в том случае, если бы Иван два раза попал в «7» (наименьшее из оставшихся чисел), он выбил бы 14 очков.

О т в е т. В «12» попал Антон.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- 4.1. В шахматном турнире в один круг количества очков, набранных участниками, составляют арифметическую прогрессию. Занявший последнее место набрал 2,5 очка. Сколько было участников? Сколько очков у победителя турнира?
- 4.2. Семь шахматистов сыграли в турнире в один круг. Победитель набрал вдвое больше очков, чем набрали вместе шахматисты, которые заняли три последних места. Занявший четвертое место набрал 3 очка. Как он сыграл с занявшим пятое место? С занявшим третье место?
- 4.3. Три друга сыграли между собой матч-турнир по шахматам в 8 кругов. Потом стали решать, кто является победителем. Первый из них сказал: «У меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей». Второй сказал: «У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей». Но когда подсчитали очки, оказалось, что больше всего очков набрал третий. Постройте пример такого распределения очков в матч-турнире.
- 4.4. В шахматном турнире в один круг участвовало 8 человек, и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько набрали шахматисты, занявшие четыре последних места вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?
- 4.5. Для выявления абсолютного победителя первенства НИИЧАВО по шахматам Амперян, Корнеев и Привалов сыграли матч-турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое число партий). Могло ли случиться так, что по числу очков Амперян занял первое место, Привалов — последнее, а по числу побед, наоборот, Амперян занял последнее место, Привалов — первое?
- 4.6. В открытом первенстве лица по шахматам участвовало 6 шахматистов, игравших друг с другом по одной партии. Таблица результатов турнира была испорчена и имела следующий вид (табл. 4.9). Известно: 5 партий турнира закончились «вничью», причем Баранчук сыграл «вничью» только одну партию. Требуется полностью восстановить таблицу турнира.

Таблица 4.9

Игрок	А	Б	В	Г	Д	Е	Очки	Место
Алексеев	○						4	I
Баранчук		○						II
Володин			○					III—V
Горбачев				○		0		III—V
Давыдов					○			V
Ершов						○		VI

- 4.7. После окончания шахматного турнира в один круг все пять его участников *А, Б, В, Г, Д*, перечисленных здесь в порядке занятых мест, обменялись впечатлениями:

— Не думал, что лишь я один не испытаю горечи поражения, — сказал *Б*.
— А вот мне, единственному, не удалось одержать ни одной победы, — заметил *Д*.

Попробуйте по этим данным восстановить турнирную таблицу: как каждый сыграл с остальными участниками?

- 4.8. Шесть команд участвовали в розыгрыше кубка по хоккею в один круг, причем все набрали разное количество очков. Только одна встреча была сыграна вничью. Каждая команда, кроме первой, выиграла у одной из команд, занявших более высокое место. Восстановите турнирную таблицу.

- 4.9. Победителями футбольного турнира оказались четыре команды: «Динамо», «Спартак», «Труд» и «Шахтер», набравшие одинаковое количество очков.

Между командами-победительницами был проведен дополнительный турнир, на котором каждая команда сыграла с каждой по одному матчу. Команда «Динамо» набрала 5 очков, «Труд» — 3 очка, «Шахтер» — 1 очко. На дополнительном турнире было забито 11 мячей, из которых 5 забили игроки «Труда». Кстати, эта команда победила «Шахтер» со счетом 2 : 1. Восстановите исход матчей с указанием счета в каждом матче, если известно, что один из матчей закончился со счетом 3 : 3.

- 4.10. В первенстве города по хоккею с шайбой, где каждая команда сыграла по одному разу с другими командами, участвовали четыре команды: «Север», «Юг», «Восток» и «Запад». Последняя встреча закончилась неожиданно: «Север» проиграл «Востоку», однако это не помешало «Северу» стать чемпионом, а «Восток» не улучшил своего турнирного положения.

Как сыграли между собой «Юг» и «Запад»?

- 4.11. В розыгрыше первенства по хоккею встретились пять сильнейших команд: «Авангард», «Буревестник», «Динамо», «Спартак» и «Торпедо». Все команды сыграли между собой по одному матчу, причем в каждом туре одна из них оказывалась свободной от игры.

В первом туре «Буревестник» проиграл спартаковцам, а во втором туре выиграл у «Авангарда». В третьем туре «Торпедо» было свободно от игры, одержав перед этим победу и проиграв другую встречу. В четвертом туре свободным от игры был «Авангард», имевший в своем активе две победы при трех сыгранных турах. Прошлогодние чемпионы — динамовцы — к этому времени сумели выиграть только один матч.

Каких результатов добилась каждая из команд в соревнованиях, если встречи четвертого и пятого туров закончились вничью?

- 4.12. Три футбольные команды провели между собой турнир, состоящий из двух кругов. Результаты игр приведены в таблице 4.10.

Определите результаты шести матчей, если один из матчей «Метеор» — «Ракета» закончился со счетом 1 : 1. Два матча турнира завершились с одинаковым счетом. При этом нужно иметь ввиду, что команды в турнирной таблице расположены в соответствии с занятыми местами.

Таблица 4.10

<i>Команда</i>	<i>Очки</i>	<i>Мячи</i>
«Метеор»	6	9 : 1
«Комета»	5	5 : 1
«Ракета»	1	1 : 13

- 4.13. Четыре футбольные команды «Старт», «Комета», «Ракета» и «Вымпел» провели каждая с каждой по одному матчу. Судья изготовил таблицу, содержащую результаты их встреч. Машинистка отпечатала таблицу с образца и отдала ее судье. Но старая печатная машинка почти ничего не отпечатала (табл. 4.11). Однако судья помнил, что остальные матчи окончились со счетом 2 : 0, 1 : 1, 2 : 2, 3 : 1, 5 : 3. Помогите судье восстановить таблицу.

Таблица 4.11

<i>Команда</i>	<i>С</i>	<i>К</i>	<i>Р</i>	<i>В</i>	<i>Победы</i>	<i>Ничьи</i>	<i>Мячи</i>	<i>Очки</i>
«Старт»	⊗							6
«Комета»		⊗		1 : 0			2 :	
«Ракета»			⊗				: 8	
«Вымпел»		0 : 1		⊗				

- 4.14. В футбольном турнире каждая пара команд должна встретиться между собой один раз. После очередного тура Боря подсчитал, что четное число встреч провели семь команд. После следующего Боря обнаружил, что четное число встреч по-прежнему имели семь команд. Возможно ли такое? Если да, то можно ли определить, сколько команд участвовали в турнире (расписание турнира составлено так, что в каждом туре свободно не более одной команды)?
- 4.15. Недавно я нашел прошлогоднюю таблицу футбольного турнира между шестью классами гимназии. На ней сохранилась лишь небольшая часть записей (табл. 4.12). Восстановите таблицу.

Таблица 4.12

<i>Класс</i>	<i>6 «А»</i>	<i>6 «Б»</i>	<i>6 «В»</i>	<i>6 «Г»</i>	<i>Очки</i>	<i>Мячи</i>	<i>Место</i>
6 «А»	⊗	1 : 1				: 3	
6 «Б»		⊗			1	: 4	
6 «В»			⊗			3 : 1	1
6 «Г»	: 5		: 1	⊗	3	: 7	

- 4.16.** Одна из страниц справочника «Футбол», с опубликованной на ней таблицей финального этапа областных игр по футболу, оказалась залитой чернилами. Все, что удалось разобрать, приведено в таблице 4.13.

Таблица 4.13

<i>Команда</i>	<i>Победы</i>	<i>Ничьи</i>	<i>Очки</i>	<i>Мячи</i>
«Динамо»		1		7 : 0
«Спартак»	3			4 : 4
«Торпедо»				1 : 7
«Зенит»				5 : 4
«Алмаз»	1			: 3

Попробуйте восстановить всю таблицу и определить результаты всех матчей этого финала. При этом нужно иметь в виду, что команды в турнирной таблице расположены в соответствии с занятыми местами.

- 4.17.** Два стрелка произвели по пять выстрелов, причем попадания были следующие: 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2. Первыми тремя выстрелами они выбили одинаковое количество очков, но тремя последними выстрелами первый стрелок выбил втрое больше очков, чем второй. Определите, сколько очков набрал каждый из них третьим выстрелом.
- 4.18.** Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько было попаданий в «7», «8» и «9», если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?
- 4.19.** На соревнованиях по стрельбе спортсмен после шести выстрелов набрал 96 очков. Проверка мишени показала, что в ней имеется только три отверстия. Судьи установили, что в некоторые отверстия пули попали более одного раза. Определите, какие попадания могли дать в сумме 96 очков, если круги мишени оценены в 1, 2, 3, 5, 10, 20, 25 и 50 очков.

- 4.20.** Удалов, Грубин, Белосельский и Ложкин решили посоревноваться на звание лучшего рыбака Великого Гусляра. Но ведь рыба рыбе — рознь. Поэтому они договорились каждую рыбу оценивать по-разному: поймал судака — получай 5 очков, за леща — 4, за окуня — 2, а за ерша — 1 очко. Единственного судака поймал Удалов. Было выловлено всего 3 окуня.

Все рыбаки вместе набрали 18 очков. Меньше всего очков получил Грубин, хотя он и наловил больше всех. Грубин и Белосельский вместе набрали столько же очков, сколько Удалов и Ложкин вместе. И наконец, у всех оказалось разное количество очков. Какой улов был у каждого из рыбаков?

- 4.21.** Тренер команды пятиборцев решил устроить для своих воспитанников отборочные соревнования. В программу состязаний он включил плавание, кросс, фехтование, стрельбу и верховую езду. В итоге соревнований по сумме набранных баллов на первое место вышел Ачкасов, затем шли Боровский, Колоколов, Дikuшин и на последнем месте оказался Емельянов.

Система оценки результатов была выбрана такая: занявший первое место в состязании по тому или другому виду спорта получал 5 баллов, следующий за ним получал 4 балла и т. д. Ачкасов закончил соревнования, набрав 24 балла. Колоколов получил по четырем видам спорта одинаковые баллы. Емельянов завоевал первенство в соревнованиях по стрельбе, а по верховой езде вышел на третье место.

Какое место на соревнованиях по стрельбе занял Боровский?

- 4.22.** «Мы с подружками по вечерам занимались разгадкой ребусов, — писала сестре Таня. — Получилось настоящее соревнование. Оно продолжалось столько дней, сколько было участниц. Каждой из нас ежедневно засчитывалось 1 очко за решение первого ребуса, 2 — за второй, 3 — за третий и т. д. И вот что интересно. Мы решили 100 ребусов. Сумма очков, которую мы вместе набирали каждый вечер, неизменно равнялась 100. Каждая из нас в конце концов набрала по 100 очков, причем ни разу не было так, чтобы кто-нибудь из нас не решил за вечер ни одного ребуса.

В первый вечер я решила семь ребусов, а Света — шесть. В последний вечер Лена решила только три ребуса».

Достаточно ли этих сведений, чтобы выяснить, сколько ребусов решила Лена в первый вечер?

- 4.23.** Я пришел на трек, когда соревнования уже начались. Поэтому с фамилиями участников заездов мне пришлось ознакомиться по программе, которую мне дал сосед. Крупным шрифтом на фоне силуэта склонившегося над рулем велогонщика было написано: Николаев, Сорокин, Виноградов и Романов.

— Вы за кого болеете? — спросил мой сосед. — За Николаева, Виноградова или армейца?

Но нам не дали договорить аплодисменты зрителей: в тот момент Николаев обходил на вираже туляка и спартаковца. Когда положение выровнялось, я ответил ему:

— Виноградова и тюменца я вижу впервые, но думаю, что молодежь не уступит опытному динамовцу.

И словно в подтверждение этих слов на дорожке разыгралась острая спортивная борьба.

До финиша остается четыре круга. Виноградов и иркутянин пытаются возглавить гонку. За три круга до финиша спартаковец и Сорокин резким броском уходят вперед. Когда остается два круга, хабаровец опережает спартаковца. На последнем круге зенитовец обходит туляка и первым пересекает линию финиша. Третье место остается за спартаковцем.

— Ну, каково? — спросил я сидящего рядом болельщика.

— Победил сильнейший, — ответил он, улыбаясь.

Кто из спортсменов занял первое место и как распределились следующие места? Честь какого города и спортивного общества защищал каждый спортсмен?

- 4.24.** На соревнованиях по конному спорту наездникам — жокеям Росину, Гордееву, Новикову и Волкову — предстояло в финале провести скачки на четырех конях: Стоике, Менторе, Алмазе и Буяне. За победу в заезде победители (как жокей, так и конь) получали 4 очка, за второе место — 3 очка, за третье — 2 очка, а за четвертое место — 1 очко.

В первом заезде победителем оказался Гордеев на коне Стоике, а остальные места распределились в алфавитном порядке лошадиных кличек. Во втором заезде жокеи поделили места в алфавитном порядке своих фамилий. В третьем заезде первым на финише был Новиков на Алмазе, остальные места распределились по тому же принципу, что и в первом заезде. В последнем заезде Волков на Стоике занял третье место, а Гордеев на Буяне — последнее место. Победителем заезда стал Росин.

Кто из жокеев стал победителем соревнований, набрав наибольшее количество очков и какая лошадь была признана лучшей?

§ 4.2. Стратегии

Игровые логические задачи являются наиболее распространенными в литературе по занимательной математике. Учитывая их обилие и разнообразие, мы ограничимся рассмотрением лишь нескольких типов таких задач. Однако анализ их решения дает достаточно ясное представление о подходах к построению алгоритмов решения логических задач-игр.

Займемся задачами на игры двух лиц. Здесь мы рассмотрим только такие игры, условия которых выгодны лишь для одной из

двух сторон. Обычный вопрос в подобной задаче: кто и как выиграет при *правильной игре*, т. е. при наилучшей стратегии обеих сторон?

Начнем с рассмотрения простой задачи.

Пример 4.7. Имеется восемь шаров: два красных, два синих, два белых и два черных. Игроки *А* и *Б* по очереди прикрепляют по одному шару к одной из вершин куба. Игрок *А* стремится к тому, чтобы нашлась такая вершина, что на этой вершине и на трех соседних вершинах имелись шары всех четырех цветов, а игрок *Б* стремится к тому, чтобы этому помешать. Кто и как выиграет при *правильной игре*?

Решение. В условиях не сказано, кто начинает игру — *А* или *Б*. Поэтому рассмотрим оба случая.

1) Пусть игру начинает *А*. Если он прикрепляет, например, красный шар к одной из вершин куба, то игроку *Б* лучше всего в ответ прикрепить также красный шар к одной из соседних вершин и т. д. (рис. 4.1). Следовательно, в этом случае выигрывает *Б*.

2) Пусть первый ход делает *Б*. Если он первым ходом прикрепит, скажем, синий шар к одной из вершин, то игроку *А* следует прикрепить также синий шар, но не к соседней, а к противоположной вершине и т. д. (рис. 4.2). Очевидно, тогда выигрывает *А*.

Ответ. Выигрывает тот, кто ходит вторым.

Пример 4.8. Имеется полоска клетчатой бумаги в 15 клеток, и ее клетки занумерованы числами 0, 1, 2, ..., 14. Два игрока по очереди передвигают фишку, которая стоит на одной из клеток, влево на одно, два или три поля. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. При каких начальных положениях фишки выигрывает начинающий, а при каких — второй игрок?

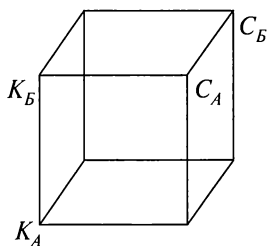


Рис. 4.1

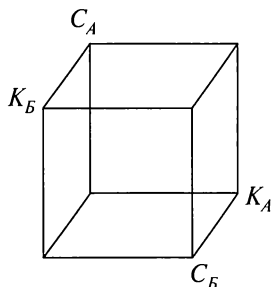


Рис. 4.2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----

Рис. 4.3

Решение. Рассмотрим несколько случаев (рис. 4.3).

1) Пусть в начальном положении фишка стоит на клетке с номером 0. Тогда выигрывает второй игрок, не сделав ни одного хода.

2) Если вначале фишка стоит на одной из клеток с номерами 1, 2 или 3, тогда выигрывает первый игрок, переместив фишку за один ход на клетку с номером 0.

3) Допустим, что фишка сначала стоит на клетке с номером 4. Тогда выиграет второй игрок: если начинающий первым ходом передвинет фишку влево на одно, два или три поля, то второму игроку следует в ответ передвинуть ее соответственно на три, два или одно поле, после чего она окажется на клетке 0. Такой ответ будем называть *дополнением* до 4.

4) Пусть фишка в начальном положении находится на одной из клеток с номерами 5, 6 или 7. А как быть здесь?

Начинающему следует переместить фишку соответственно на одно, два или три поля с тем, чтобы она оказалась на клетке 4, после чего дело сведется к предыдущему случаю, но с переменной игроков местами. Поэтому выигрывает начинающий.

5) Пусть фишка стоит на поле 8. Здесь выигрывает второй игрок, дважды дополняя число полей, на которые переместил фишку начинающий, до 4.

Далее, если фишка вначале стоит на клетке 9, 10 или 11, то выигрывает начинающий (подумайте как?), если на клетке 12, то второй игрок, а если на клетке 13 или 14, то снова начинающий.

Таким образом, второй игрок выигрывает тогда и только тогда, когда фишка в начальном положении стоит на поле 4, 8 или 12. Перечисленные поля называются *выигрышными позициями*.

Ответ. Начальными позициями, выигрышными для второго игрока, являются поля 4, 8 или 12.

Анализ решения последнего примера позволяет сформулировать правила, достаточно часто применяемые в игровых задачах:

Правило 4.1. Выделить (и использовать!) множество выигрышных позиций.

Правило 4.2. Для достижения и удержания выигрышных позиций использовать стратегию дополнения.

Пример 4.9. Имеется кучка камней. Двое играющих (начинающий и его противник) по очереди берут по своему усмотрению один, два или три камня. Проигрывает тот, кто возьмет последний камень.

1) В кучке шесть камней. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть? Как должен играть противник, если начинающий в одном из своих ходов допустит ошибку? Как меняется план игры, если в кучке семь или восемь камней?

2) В кучке одиннадцать камней. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть? Как должен играть противник, если начинающий в одном из своих ходов допустит ошибку?

Решение. 1) Пусть в кучке шесть камней. Рассмотрим различные варианты игры.

Если начинающий возьмет три камня, то противник возьмет два камня и выиграет, так как начинающему остается один камень и, взяв его, начинающий проигрывает.

Если начинающий возьмет два камня, то противник возьмет три камня и вновь выигрывает.

Если начинающий возьмет один камень, то при любом ходе противника начинающий выигрывает. Действительно, при любом ходе противника, который возьмет один, два или три камня, начинающий возьмет оставшиеся до четырех камни (дополнение!), и противнику останется единственный камень.

Следовательно, начинающий выигрывает, если он своим первым ходом возьмет один камень, а после первого хода противника возьмет столько камней, что сумма камней, взятых его вторым ходом и первым ходом противника, равняется четырем.

Если в кучке семь камней, то для выигрыша в этом случае начинающему своим первым ходом следует взять два камня, а если в кучке восемь камней, то для выигрыша начинающему своим первым ходом следует взять три камня.

2) Пусть в кучке одиннадцать камней. Очевидно, начинающий выигрывает, если он своим первым ходом возьмет два камня, а после каждого хода противника будет брать столько камней, чтобы сумма камней, взятых этим ходом начинающего и предыдущим ходом противника, равнялась четырем.

Как вести себя противнику, если начинающий в одном из своих ходов допустит ошибку?

Если начинающий своим первым ходом взял не два, а один камень, то противнику следует взять также один камень, и он становится в позицию начинающего, а поэтому выигрывает.

Если начинающий своим первым ходом взял не два, а три камня, то противнику следует взять также три камня, и он становится в позицию начинающего, а поэтому выигрывает.

Наконец, если начинающий допустил ошибку во втором ходе, например противник взял один камень, а начинающий — один или два камня (нет дополнения!), то противнику следует взять последние камни этой четверки (дополнение!), и тогда он выигрывает.

Легко получить ряд обобщений этой задачи.

Пусть правила игры не изменены, а изменено количество предметов. Тогда анализ легко приводит к выводу, что при любом числе предметов Q «выигрышными» числами предметов, которые начинающий должен оставить противнику, будут числа: 1, 5, 9, 13, 17, ..., $1 + 4q$, где $1 + 4q$ — первое выигрышное число меньше Q . И если Q само не является «выигрышным», то, взяв своим первым ходом $Q - (1 + 4q)$ предметов, начинающий обеспечивает себе выигрыш, пользуясь в последующих ходах стратегией дополнения.

Пусть в условиях предыдущих задач ничего не меняется, за исключением того, что выигрывает тот, кто берет последним предмет. Тогда стратегия игры начинающего меняется незначительно. А именно, для него выигрышными числами будут 4, 8, ..., $4k$ в примере 4.9, а в его обобщении — числа $p + 1, 2p + 2, \dots, kp + k$, где $kp + k$ ближайшее к Q натуральное число.

К более сложному обобщению мы приходим, если в условии задачи изменить не только исходное количество предметов, но и правило игры.

Пример 4.10. На столе 14 предметов. Играющие по очереди берут по своему усмотрению один, два или три предмета. Выигрывает тот, кто заберет последний предмет. При какой стратегии выигрывает начинающий? Как должен вести игру противник, если по ходу игры начинающий допустил ошибку? Как должен вести игру начинающий, если выигрывает тот, кто заставит своего партнера взять последний предмет?

Решение. Так как число 14 представимо в виде суммы $14 = 2 + 4 + 4 + 4$, то выигрышной стратегией начинающего будет следующая.

Своим первым ходом начинающий должен взять два предмета, а потом после каждого хода противника, при котором противник берет p предметов ($p \leq 3$), брать дополнение до 4, т. е. $(4 - p)$ предметов. Очевидно, что при такой игре последний предмет берет начинающий.

Если начинающий не знает выигрышной стратегии и допускает в игре ошибку, то противник должен принять следующую стратегию.

1) Если начинающий своим первым ходом взял не два, а один предмет (или три предмета), то противнику следует взять также один предмет (или три предмета), и он становится в позицию начинающего.

2) Если начинающий допустил ошибку при своем втором (или последующем) ходе, т. е. после хода противника, взявшего p предметов, он взял не $(4 - p)$, а меньше (или больше) предметов, например k и $k < (4 - p)$, то противнику следует взять $4 - p - k(8 - p - k)$ предметов (дополнение!), и он станет в позицию начинающего.

Если проигрывает тот, кто берет последний предмет, то выигрышная стратегия начинающего такова: своим первым ходом он должен взять один предмет, а после каждого хода противника, взявшего p предметов, брать дополнение до 4, т. е. $(4 - p)$ предметов.

Рассмотренные примеры, естественно, приводят к постановке задачи в еще более общем виде.

Пример 4.11. Имеется n предметов. Играют двое, ходят по очереди. При каждом ходе играющий берет один, два, три и т. д., k предметов, $k < n$. Выигрывает тот, кто возьмет последний предмет.

При какой стратегии выигрывает начинающий? Как должен вести игру противник, если по ходу игры начинающий допустил ошибку? Как должен вести игру начинающий, если проигрывает тот, кто берет последний предмет?

Решение. Легко видеть, что при n , кратном числу $k + 1$, выигрышную стратегию имеет противник. В самом деле, если начинающий при любом его ходе берет r предметов ($r \leq k$), то противник должен брать дополнение до $k + 1$, т. е. $k + 1 - r$ предметов, и эта стратегия обеспечивает взятие последнего предмета.

Пусть n не кратно числу $k + 1$, тогда $n = q \cdot (k + 1) + p$. В этом случае, очевидно, выигрышная стратегия начинающего такова: своим первым ходом он должен взять p предметов, а потом после каждого хода противника, взявшего r предметов ($r \leq k$), начинающий берет дополнение до $k + 1$, т. е. $k + 1 - r$ предметов.

Если начинающий не знает выигрышной стратегии и допускает в игре ошибки, то противник должен придерживаться следующей стратегии.

1) Если начинающий своим первым ходом взял не p , а l предметов, где $l < p$, то противнику следует взять $p - l$ предметов, и он становится в позицию начинающего.

Если начинающий своим первым ходом взял l предметов, где $l > p$, то противнику следует взять $k + 1 + p - l$ предметов, и он вновь становится в позицию начинающего.

2) Если начинающий допустил ошибку при своем втором (или последующем) ходе и взял не $k + 1 - r$, а меньше (или больше) предметов, например m , и $m < k + 1 - r$ ($m > k + 1 - r$), то противнику следует взять $k + 1 - r - m$ ($2k + 2 - r - m$) предметов, и он становится в позицию начинающего.

Если проигрывает тот, кто берет последний предмет, то выигрышная стратегия начинающего такова: своим первым ходом он должен взять $p - 1$ предметов, а после каждого хода противника, взявшего r предметов, брать $k + 1 - r$ предметов.

Более сложным является следующий пример.

Пример 4.12. Из кучки, где имеется нечетное число спичек, каждый из двух играющих берет себе по очереди одну или две спички. Выигрывает тот, у кого в конце игры окажется четное количество спичек.

В каких случаях и при какой стратегии выигрывает начинающий?

В каких случаях и при какой стратегии выигрывает начинающий, если по условию задачи выигрывает тот, у кого в конце игры окажется нечетное количество предметов?

Решение. Все нечетные числа имеют вид $4k + 1$ или $4k + 3$. Рассмотрим оба случая.

Пусть кучка перед началом игры содержит $4k + 3$ спичек. В этом случае стратегия, при которой начинающий выигрывает, состоит в следующем: своим первым ходом он должен взять две спички, а далее после каждого хода противника начинающий берет столько спичек, сколько взял противник. При такой стратегии после ряда ходов игроки окажутся перед кучкой в три или пять спичек, и при этом предстоит ход противника. Если в кучке осталось три спички, а начинающий уже взял, очевидно, $2 + (4k - 2) : 2 = 2 + (2k - 1) = 2k + 1$ спичек, то независимо от того, сколько возьмет своим ходом противник (одну или две спички), начинающий берет последним ходом одну спичку и, следовательно, выигрывает.

Пусть в кучке осталось пять спичек и предстоит ход противника, при этом начинающий уже взял, очевидно, $2 + (4k - 4) : 2 = 2k$ спичек. Если противник очередным ходом возьмет одну спичку, то начинающий берет также одну спичку и оказывается в условиях предыдущего случая.

Если противник возьмет очередным ходом две спички, то начинающий берет также две спички, оставляя на последний ход противника одну спичку, и, следовательно, выигрывает.

В случае, когда кучка перед началом игры содержит $4k + 1$ спичку, начинающий при правильной стратегии противника проигрывает. Действительно, для этого противнику нужно пользоваться стратегией начинающего, рассмотренной в предыдущем случае.

Теперь нетрудно установить стратегию играющих для случая, когда по условию задачи выигрывает тот, у кого в конце игры, после того как все спички будут разобраны, окажется нечетное число спичек.

Задача усложняется, если исходное число спичек в кучке любое.

Значительное изменение стратегии произойдет, если в условии задачи фигурирует два множества предметов. Обилию возможных деталей в условии задачи здесь будет отвечать большое количество различных стратегий. Разберем несколько конкретных примеров.

Пример 4.13. На столе лежат две кучки шаров. Два игрока по очереди берут со стола любое число шаров, но при одном ходе из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние шары. Начинающий имеет право либо начать игру, либо предоставить первый ход противнику. Кто и как выигрывает при правильной игре?

Решение. Выигрышная стратегия начинающего устанавливается легко.

Действительно, пусть в кучках различное количество шаров. Тогда начинающий своим первым ходом должен уравнивать количество шаров в обеих кучках. После этого начинающий выигрывает, беря на каждом следующем ходу то же количество шаров, что и противник, но из другой кучки.

Если же в обоих множествах одинаковое количество шаров, то начинающий должен предоставить первый ход противнику и тем самым свести стратегию игры к первому случаю.

При решении последнего примера выяснились еще две из основных идей, используемых в игровых задачах.

Правило 4.3. Часто (но не всегда!) выгодно отвечать на ход противника симметричным в некотором смысле ходом.

Правило 4.4. Следует стремиться к тому, чтобы передать очередь невыгодного хода противнику.

Пример 4.14. На поле $f8$ шахматной доски стоит ферзь. Играют двое, ходят по очереди. Каждый за один ход может передвинуть ферзя либо на несколько клеток вниз по вертикали, либо на несколько клеток влево вниз по диагонали, либо на несколько клеток влево по горизонтали. Проигрывает тот, кому некуда ходить, а выигрывает, следовательно, тот, кто поставит ферзя в левый нижний угол — на поле $a1$. Как играть, чтобы выиграть? Кто победит — начинающий или его партнер? И кто кого, если ферзь сначала стоял на поле $e8$?

Решение. Ясно, что если ферзь стоит на поле $a1$, то тот, чья очередь ходить, уже проиграл. Поэтому отметим это поле — *проигрышную позицию* — знаком «минус».

Если ферзь стоит на поле, с которого одним ходом можно попасть на $a1$, то начинающий пойдет на $a1$ и выиграет. Поэтому отметим *множество выигрышных позиций* — поля, с которых можно за один ход попасть на $a1$, — знаком «плюс».

Пусть теперь ферзь стоит на поле $c2$. Ясно, что начинающий игру с этого поля проиграет, так как при любом своем ходе он попадает на «плюс», после чего противник ставит ферзя на $a1$.

Поэтому $c2$ отметим «минусом», а все клетки, с которых можно за один ход попасть на $c2$, отметим знаком «плюс».

Нетрудно видеть, что знак «минус» следует поставить в клетках $b3$, $d6$, $e8$, $f4$, $h5$ (рис. 4.4).

Теперь можно ответить на вопросы задачи.

1) Если ферзь стоит на клетке, отмеченной знаком «плюс», то начинающему достаточно первым ходом поставить ферзя на клетку, отмеченную знаком «минус» и выигрыш ему обеспечен.

2) Если ферзь стоит на клетке, отмеченной знаком «минус», то начинающий проигрывает.

3) Если ферзь сначала стоял на клетке $e8$ (она отмечена знаком «минус»), то начинающий проигрывает.

Только что описанный в примере 4.14 метод последовательного нахождения выигрышных позиций называется *анализом с конца*.

Пример 4.15. В двух кучках лежат камни: в первой — m , во второй n ($m \neq n$). Играют двое, ходят по очереди. Каждый из иг-

роков при своем ходе может взять либо произвольное число камней из первой кучки, либо любое число камней из второй кучки, либо поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Существует ли выигрышная стратегия для начинающего?

Решение. Решение этой задачи легко связать с решением рассмотренного примера 4.14. Действительно, пусть для конкретности $m = 5$, а $n = 4$. Рассмотрим шахматную доску. Поставим ферзя на поле $e6$. Тогда можно считать, что под ферзем лежат 4 камня, а слева от ферзя — 5 (рис. 4.5).

Каждому положению ферзя на доске можно сопоставить две кучки камней: в первой — столько камней, сколько горизонталей находится ниже ферзя, а во второй — сколько вертикалей слева от ферзя. Таким образом, установлено соответствие между позициями игр в примерах 4.14 и 4.15: каждому распределению камней по кучкам соответствует поле шахматной доски, а каждому полю доски соответствует пара кучек камней. Установим соответствие и между ходами в этих играх. Если берется несколько камней из первой кучки, то ферзь сдвигается на столько же полей вниз, если из второй — ферзь сдвигается на столько же полей влево, а если камни взяты из обеих кучек, то ферзь сдвигается влево вниз по диагонали. Если, например, из каждой кучки в приведенной позиции берется по одному камню, то ферзь ходит с $e6$ на $d5$. Очевидно, что игрок, поставивший ферзя своим последним ходом на поле $a1$, выигрывает. Для игры, рассмотренной в примере 4.15, это означает, что выигрывает игрок, взявший последний (последние) камень.

8	+	+	+	+	—	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	—	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	—
4	+	+	+	+	+	—	+	+
3	+	—	+	+	+	+	+	+
2	+	+	—	+	+	+	+	+
1	—	+	+	+	+	+	+	+
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>

Рис. 4.4

8								
7								
6								
○ 5								
○ 4								
○ 3								
○ 2								
○ 1								
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
	○	○	○	○				

Рис. 4.5

Из сказанного следует, что начинающий имеет выигрышную стратегию, если он после своего первого хода может оставить в кучках такое количество камней, которое соответствует выигрышному положению ферзя на шахматной доске (ферзь поставлен на поле, отмеченное знаком «минус»). При $m = 5$ и $n = 4$ начинающий выиграет, если он своим первым ходом возьмет один камень из второй кучки (ферзь ставится на поле $d6$) или возьмет из обеих кучек по три камня (ферзь ставится на поле $b3$).

Легко видеть, что если m и n таковы, что это соответствует положению ферзя на поле, отмеченном знаком «минус», то начинающий проигрывает (при правильной игре противника).

Ограниченность шахматной доски не означает, что при игре с камнями можно брать только кучки с количеством камней не более восьми. Действительно, мы можем мысленно продолжить шахматную доску вправо вверх и расставить на этом продолжении знаки «плюс» и «минус» по следующим правилам.

- 1) Если с поля некуда пойти, то ставим знак «минус».
- 2) Если с рассматриваемого поля можно попасть на поле, отмеченное «минусом», то ставим знак «плюс».
- 3) Если все ходы ведут на поле, отмеченное «плюсами», то ставим «минус».

При решении этого примера выяснилась еще одна из идей, используемых в игровых задачах.

Правило 4.5. Переформулировать условие в другом, более удобном в каком-то смысле виде.

Пример 4.16. В одном ящике лежит 15 синих шаров, в другом — 12 белых. Играют двое. Одним ходом каждому разрешается взять 3 синих шара или 2 белых. Выигравшим считается тот, кто берет последние шары. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть?

Решение. Начинающий должен своим первым ходом взять 2 белых шара из второго ящика, поскольку после этого отношение числа синих шаров к числу белых станет равным $15 : 10 = 3 : 2$.

Если теперь противник своим первым ходом возьмет 3 синих шара из первого ящика или 2 белых из второго, то начинающему следует в ответ взять соответственно 2 белых шара из второго ящика или 3 синих из первого, с тем чтобы сохранить отношение $3 : 2$ чисел шаров в ящиках и т. д.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

4.25. Имеется 10 фишек: 2 белых, 2 черных, 2 красных, 2 синих и 2 зеленых. Два игрока *A* и *B* ставят по очереди по одной фишке в одной из вершин выпуклого 10-угольника. Игрок *A* хочет получить пять последовательных вершин всех пяти цветов, а игрок *B* хочет этому помешать. Игру начинает *B*. Кто выиграет при правильной игре?

4.26. На доске написано уравнение

$$*x^2 + *x + * = 0.$$

Первый из двух игроков называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек. Может ли первый игрок выбрать три числа так, чтобы квадратное уравнение имело разные рациональные корни, или второй всегда может ему помешать?

4.27. На листке бумаги написаны два натуральных числа. Двое играющих по очереди делают ходы. Ход играющего состоит в том, что он зачеркивает любое из написанных чисел и вместо него пишет любое натуральное число, меньшее зачеркнутого, или нуль. Игра продолжается до тех пор, пока не будут написаны нули. Выигрывает тот, кто последним пишет нуль. Как должен вести игру начинающий, чтобы выиграть? В каком случае для выигрыша следует первый ход уступить противнику?

4.28. На одной из клеток доски 8×8 стоит шашка. Два игрока по очереди перемещают шашку на одно поле вверх или вправо, или по диагонали вправо-вверх. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередного хода из-за того, что шашка оказалась в правом верхнем углу. При каких начальных положениях шашки выигрывает начинающий, а при каких — второй игрок?

4.29. На круглом столе лежат 11 шашек: 5 черных и 6 белых. Пятеро сидящих за столом ребят играют в следующую игру. Сначала каждый берет по две шашки, потом начинающий берет оставшуюся шашку. Если у него оказываются все три шашки одинакового цвета, то он выиграл, и игра прекращается, если нет, то он оставляет себе две шашки одинакового цвета, а третью предлагает противнику. Если у того окажутся все шашки одинакового цвета, то выиграл он, если нет, то он поступает аналогично предшествующему и т. д.

Может ли так случиться, что каждый сделает не меньше двух ходов?

4.30. Играют двое. Начинающий называет произвольное натуральное число, не превышающее десяти. Противник прибавляет к названному числу свое натуральное число, не превышающее десяти, и сообщает сумму. К этой сумме начинающий прибавляет какое-либо натуральное число, опять-таки не превышающее десяти, и сообщает сумму. К новой сумме противник прибавляет число, не превышающее десяти и т. д. Выигрывает тот, кто первым достигнет ста. Как добиться победы?

4.31. Играют двое. Первый участник игры называет произвольное целое положительное число, не превосходящее четырех, т. е. он может назвать

одно число из чисел 1, 2, 3, 4. Второй игрок прибавляет к названному числу свое целое число, также не превосходящее четырех. К этой сумме первый прибавляет какое-либо положительное число, не превосходящее четырех, и сообщает сумму и т. д. Выигрывает тот, кто первым достигнет числа 26. Как добиться победы?

- 4.32.** Двое играют в следующую игру: каждый игрок по очереди вычеркивает одно число из ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 до тех пор, пока не останется два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает первый игрок, если не делится, то второй. Докажите, что первый игрок имеет выигрышную стратегию.
- 4.33.** Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает девять чисел (по своему выбору) из последовательности 1, 2, ..., 100, 101. После одиннадцати таких вычеркиваний останутся два числа. Затем второй игрок присуждает первому столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Докажите, что первый игрок всегда сможет набрать по крайней мере 55 очков, как бы ни играл второй.
- 4.34.** Два игрока по очереди выписывают цифры 9-значного числа: первую цифру пишет первый, вторую — второй, третью — снова первый и т. д. Первый игрок хочет, чтобы получилось число, делящееся на 9, а второй хочет ему помешать. Кто и как выиграет при правильной игре?
- 4.35.** Два игрока по очереди выписывают последовательные цифры 10-значного числа: первую цифру пишет первый, вторую — второй, третью — снова первый и т. д. Второй игрок стремится к тому, чтобы полученное число делилось на 7, а первый хочет ему помешать. Кто и как выиграет при правильной игре?
- 4.36.** Два игрока по очереди кладут по одной шашке на круглый стол. Класть шашки друг на друга нельзя. Шашки одинакового размера, и их достаточно для того, чтобы закрыть ими весь стол. Выигравшим считается тот, кто положит шашку на последнее свободное место на столе. Докажите, что начинающий при правильной игре выигрывает.
- 4.37.** Двое играют в крестики-нолики: начинающий пишет крестики, второй игрок — нолики. Докажите, что существует стратегия, следуя которой начинающий не проиграет.
- 4.38.** Двое играют в крестики-нолики на доске 3×3 по измененным правилам: каждый на своем ходу может поставить как крестик, так и нолик. Выигрывает тот, после хода которого образуется три подряд стоящих одинаковых значка (по вертикали, горизонтали или диагонали, как и в обычных крестиках-ноликах). Кто выиграет в эту игру: начинающий или другой игрок? И как?
- 4.39.** Двое мальчиков играют в такую игру: они по очереди ставят ладьи на шахматную доску. Выигрывает тот, при ходе которого все клетки доски оказываются побитыми поставленными фигурами. Кто выигрывает в этой игре, если оба стараются играть наилучшим образом?
- 4.40.** На плоскости дан правильный 30-угольник. Два игрока по очереди проводят его диагонали, соблюдая следующие два правила.

1) Нельзя соединять диагональю две вершины, если хотя бы из одной из них уже проведена диагональ.

2) Нельзя пересекать уже проведенные диагонали.

Выигравшим считается тот, кто проведет последнюю диагональ. Кто и как выиграет при правильной игре?

4.41. На доске написано n минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюсы. Выигравшим считается тот, кто переправит последний минус. Кто и как выиграет при правильной игре, если: 1) $n = 9$; 2) $n = 10$?

4.42. На бумаге по окружности нарисовано несколько минусов. Двое игроков по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюсы. Проигравшим считается тот, кто переправит последний минус. Кто и как выиграет при правильной игре, если вначале минусов было: 1) 14; 2) 15?

4.43. Двое игроков по очереди выписывают последовательные цифры 16-значного числа: первую цифру пишет первый, вторую — второй, третью — снова первый и т. д. Второй игрок стремится к тому, чтобы получилось число, делящееся на 11, а первый хочет ему помешать. Докажите, что у второго игрока имеется выигрышная стратегия.

4.44. Имеются равенства:

$$\begin{aligned} * &= *, \\ * + * &= *, \\ * + * + * &= *. \end{aligned}$$

Два игрока по очереди вписывают вместо звездочек числа. Каждый из них может написать любое число вместо любой свободной звездочки. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы все равенства выполнялись.

4.45. На столе лежит 40 спичек. Два игрока по очереди берут одну, две, три, четыре или пять спичек. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние спички. Кто и как выиграет при правильной игре?

4.46. На столе лежит 30 камешков. Два игрока по очереди берут один, два или три камешка. Проигравшим считается тот, кто возьмет со стола последние камешки. Докажите, что при правильной игре выигрывает начинающий.

4.47. На доске написано число 31. Коля и Витя по очереди пишут натуральное число, которое получается при уменьшении имеющегося натурального числа не более чем вдвое. Выигравшим считается тот, после хода которого получилось число 1. Кто и как выиграет при правильной игре?

4.48. Имеется 30 одинаковых предметов. Двое играющих по очереди берут по своему усмотрению один, два или три предмета. Проигрывает тот, кто возьмет последний предмет. Как должен играть начинающий, чтобы всегда обеспечить себе выигрыш? Как должен вести игру противник, чтобы обеспечить себе выигрыш, если начинающий в начале игры допустил ошибку? Как должен вести игру начинающий, чтобы выиграть, если выигравшим будет тот, кто заберет последний предмет?

- 4.49. Имеется 60 одинаковых предметов. Двое играющих по очереди по своему усмотрению берут один, два, три, четыре или пять предметов. Проигрывает тот, кто возьмет последний предмет. Как должен вести игру начинающий для того, чтобы обеспечить себе победу? Как должен вести игру противник, чтобы выиграть, если начинающий сделал ошибку?
- 4.50. Из кучки, где имеется 25 спичек, каждый из двух играющих берет себе по очереди одну или две спички. Выигрывает тот, у кого в конце игры окажется нечетное количество спичек. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть? Как должен играть противник, чтобы выиграть в случае ошибки, допущенной в стратегии начинающим?
- 4.51. Имеется 15 предметов. Играют двое, ходят по очереди. При каждом ходе играющий берет один или три предмета. Выигрывает тот, кто возьмет последний предмет. При какой стратегии выигрывает начинающий?
- 4.52. Имеется 22 предмета. Играют двое, ходят по очереди. При каждом ходе играющий берет два или четыре предмета. Выигрывает тот, кто берет последний предмет. При какой стратегии выигрывает начинающий?
- 4.53. На столе лежит 60 монет. Два игрока по очереди берут со стола одну, две, три или четыре монеты. Выигравшим считается тот, кто возьмет со стола последние монеты. Кто выиграет при правильной игре?
- 4.54. Имеется две кучки спичек, в одной 20 спичек, в другой 25. Каждый из двух играющих по очереди выбрасывает одну из кучек, а другую разбивает на две части. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередного хода из-за того, что в каждой кучке осталось по одной спичке. Кто и как выиграет при правильной игре?
- 4.55. Имеются две кучи камней. Каждый из двух играющих по очереди выбирает одну из куч и берет из нее любое количество камней. Начинающий имеет право начинать игру или предоставить первый ход своему противнику. Первоначально:
- 1) в каждой кучке по 45 камней;
 - 2) в первой кучке 30 камней, а во второй — 16 камней.
- Как должен вести игру начинающий, чтобы забрать последний камень?
- 4.56. В одном ящике лежит 50 шариков, в другом — 80 шариков. По условиям игры каждый из двух игроков по очереди вынимает из какого-либо одного ящика любое число шаров. Выигравшим считается тот игрок, после хода которого оба ящика окажутся пустыми. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть?
- 4.57. На столе лежат две кучки спичек: в одной 50, в другой 30 спичек. Два игрока по очереди берут со стола любое число спичек, но при одном ходе из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние спички. Кто и как выиграет при правильной игре?
- 4.58. На самом левом поле клетчатой полосы 1×2004 лежат три пуговицы. Каждый из двух играющих по очереди переносит любую пуговицу (но только одну за один ход) вправо на любое число полей. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Докажите, что начинающий игру может обес-

печить себе победу. Проанализируйте стратегию противника для выигрыша, если начинающий не знает выигрышной стратегии.

4.59. На столе лежат три кучки камешков, по 30 камешков в каждой кучке. Два игрока по очереди берут со стола любое число камешков, но при одном ходе из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние камешки. Кто и как выиграет при правильной игре?

4.60. Между соседними лагерями один день пути. Экспедиции требуется перенести одну банку консервов в лагерь, находящийся в пяти днях пути от базового лагеря, и вернуться обратно, при условии что:

— при каждом переходе каждый член экспедиции может взять с собой не более трех банок консервов;

— в день каждый съедает банку консервов;

— оставлять консервы можно только в промежуточных лагерях.

Какое наименьшее количество банок консервов придется взять из базового лагеря для этой цели?

4.61. Четверо путешественников решили исследовать дикую бесплодную пустыню. Они знали, что по дороге найти воды не удастся. Поэтому кроме необходимого снаряжения и пищи всем надо было брать запас питьевой воды. Каждый человек мог нести на себе запас воды и пищи лишь на 10 дней — не больше. И если бы они пошли все вместе, они не смогли бы углубиться в пустыню далее чем на 5 дневных переходов. Однако если бы через день или два, скажем, один из четырех оставил бы себе то, что необходимо для возвращения, а оставшееся продовольствие отдал товарищам, то трое могли бы продвинуться вперед дальше чем на 5 переходов.

Путешественникам было важно проникнуть как можно дальше в пустыню. Для этого последние переходы должен был сделать один человек. Если принять, что передача продуктов и воды, а в случае необходимости и организация надежно укрытых складов с продовольствием производились только в конце дневных переходов, то как далеко мог продвинуться в глубь пустыни один из путешественников?

§ 4.3. Логические задачи на индукцию (задачи о колпаках)

«Задачами о колпаках» будем условно называть все разновидности фактически одной и той же задачи, к которым относится и следующая.

Пример 4.17. Три мудреца поспорили: кто из них мудрее. Спор помог решить случайный прохожий. «Вы видите у меня, — сказал он, — пять колпаков: три красных и два белых. Закройте глаза». И он надел каждому по красному колпаку, а белые спрятал. «Можете открыть глаза, — сказал прохожий. —

Кто угадает, какого цвета колпак украшает его голову, тот вправе считать себя самым мудрым».

Долго сидели мудрецы, глядя друг на друга. Наконец один воскликнул: «На мне красный!» Как он догадался?

Решение. Анализ этой задачи можно начинать с упрощенного варианта: мудрецов — два, а колпаков — три (два красных и один белый). В этом случае каждый из мудрецов видит перед собой товарища в красном колпаке. Чтобы владелец колпака мог решить вопрос о том, какого цвета колпак надет на нем, достаточно предположить, что на нем колпак белого цвета. Тогда станет ясна невозможность справедливости этого предположения (второй мудрец, видя перед собой белый колпак, должен сразу же определить, что на нем красный колпак).

В общем случае мудрец определяет цвет своего колпака, рассуждая так: «Я вижу перед собой два красных колпака. Предположим, что на мне белый колпак. Тогда второй мудрец, видя перед собой красный и белый колпаки, рассуждал бы так: «Если бы на мне был тоже белый колпак, то третий сразу же догадался бы и заявил, что на нем красный колпак. Но он молчит, значит, на мне не белый, а красный колпак». А так как второй не говорит этого, значит на мне красный колпак».

Задача о «колпаках» может быть обобщена различными способами.

Сформулируем обобщение задачи в форме игры мудрецов, в которой участвует n человек. Перед началом игры им предъявляется k красных и l белых колпаков ($k + l \geq n$). После этого участникам игры завязывают глаза и на голову каждого из них надевается один из колпаков. Оставшиеся колпаки прячутся. Затем участникам игры предлагается открыть глаза и определить цвет своего колпака, зная цвета колпаков, надетых на головы его партнеров по игре. Выигрывает тот, кто первым назовет цвет своего колпака и даст логическое объяснение тем рассуждениям, которые привели его к правильному ответу.

Пример 4.18. Участников игры мудрецов два, а перед началом игры им предъявили три колпака: два красных и один белый.

Определить, кто будет победителем, если на одного участника игры надет красный колпак, а на другого — белый.

Решение. Выигрывает участник игры в красном колпаке. Действительно, он видит на партнере по игре белый колпак и,

зная, что предьявлялся только один белый колпак, приходит к выводу о том, что на нем может быть только красный колпак.

Другим обобщением рассматриваемой задачи будет игра мудрецов, в которой используются колпаки трех цветов, например, красные, белые и синие. Игра при этом заметно усложняется. Однако в ряде случаев участники игры, владельцы колпаков двух цветов, могут облегчить свою задачу, исключив из рассмотрения участников в колпаках третьего цвета. Покажем это при решении конкретной задачи.

Пример 4.19. Участников игры мудрецов пять. Перед началом игры им предьявлено десять колпаков: шесть красных, два белых и два синих. Определить, кто будет победителем игры, если на трех участников игры надеты красные колпаки, на одного — белый и на одного — синий.

Решение. Пронумеруем мудрецов так, как показано на рисунке 4.6. Покажем, как четыре первых участника могут исключить из рассмотрения участника в синем колпаке. Проведем необходимые рассуждения от имени одного из них, например третьего: «Если бы на мне был синий колпак, то первый, второй и четвертый участники видели бы перед собой два синих колпака (их всего два по условию игры), и каждый из них пришел бы к выводу, что на них не синий колпак. Это позволило бы им считать, что число участников три, на головах которых только белые и красные колпаки. При этом первый и второй участники имеют возможность определить цвет своих колпаков. Но они молчат. Значит, на мне не синий колпак».

Таким образом, игра мудрецов сводится к случаю, когда участников игры четыре, а на них надеты колпаки двух цветов: три красных и один белый. При этом победителем игры будет один из участников игры в красном колпаке, рассуждая так: «Если бы на мне был белый колпак, то два партнера по игре в красных колпаках видели бы перед собой два белых колпака и один красный. Но предьявилось только два белых колпака, и значит, они могут прийти к выводу, что на каждом из них красный колпак. Однако они молчат. Значит, на мне не белый колпак, а красный».

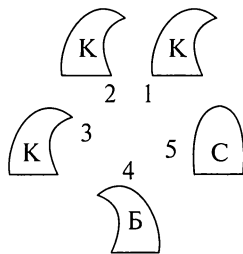


Рис. 4.6

Отметим, что аналогично можно было исключить из рассмотрения участника в белом колпаке, но невозможно было исключить из рассмотрения участников в красных колпаках.

Во всех рассмотренных случаях соревнующиеся сидят так, что видят всех своих товарищей, кроме себя. Но есть еще одно обобщение «задачи о колпаках», когда соревнующиеся сидят друг за другом и, следовательно, не каждый может видеть друг друга.

Пример 4.20. Три гнома: Фи́ли, Ба́лин и Два́лин сидели без головных уборов друг за другом, причем Ба́лину и Два́лину было запрещено оглядываться назад, Ба́лин же видел голову сидящего впереди Два́лина, а Фи́ли — головы обоих своих приятелей. Из мешка, содержащего два белых и три красных колпака (об этом все трое были осведомлены), каждому был надет колпак неизвестного (для него) цвета, а два колпака неизвестного (для всех) цвета остались в мешке. Фи́ли заявил, что не может определить цвет своего колпака. Ба́лин слышал ответ Фи́ли и сказал, что у него не хватает данных для определения цвета колпака, находящегося у него на голове. Мог ли Два́лин на основании ответов своих приятелей определить цвет своего колпака?

Решение. Так как Фи́ли видел головы своих приятелей и заявил, что он не может определить цвет своего колпака, значит, колпаки на головах Ба́лина и Два́лина не оба белые (так как белых колпаков было только два). Значит, колпаки, которые видит Фи́ли, могут быть либо оба красные, либо один белый, а другой красный. Пришли к задаче о двух мудрецах и трех колпаках (два красных и один белый) с той особенностью, что один из них не видит колпака другого. Если бы на голове Два́лина был белый колпак, то Ба́лин мог бы сразу определить, что на нем красный колпак, а так как ему тоже не хватает данных, то Два́лин может определить, что на нем красный колпак.

В некоторых задачах такого типа не указывается количество белых колпаков. Но в условиях этих задач имеются дополнительные данные, которые и являются ключом к решению задачи.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

4.62. Из трех победителей математического турнира, набравших по одинаковому числу очков, надо было выделить самого сообразительного. Для этого поступили так: им показали пять колпаков — три белых и два красных. Завязав затем им глаза, на голову каждого надели по кол-

паку, а оставшиеся два колпака убрали. Когда повязки были сняты, было объявлено, что победителем турнира будет первый, определивший цвет своего колпака. Некоторое время соревнующиеся молча смотрели друг на друга. Наконец один из них уверенно заявил, что на него надет белый колпак. Как он рассуждал?

- 4.63. На окружной математической олимпиаде особенно отличились семь лицеистов. Чтобы определить среди них победителя, провели такой конкурс. Показали им девять марок: семь красных и две зеленых. Затем всем семерым завязали глаза и каждому на лоб наклеили по красной марке, а зеленые убрали. После этого повязки сняли и объявили, что победителем будет тот, кто первым определит цвет своей марки. Никто из соревнующихся не мог видеть цвета своей марки, но видел своих товарищей. После некоторого размышления Алексей воскликнул: «У меня — красная!» Как он догадался?
- 4.64. Когда-то в одной стране правил пожилой король. Наследников у него не было. Чувствуя, что жить ему осталось немного, он начал искать достойного преемника. Наконец четыре самых талантливых юноши королевства предстали перед ним. Король должен был сделать окончательный выбор. Всем четверем завязали глаза и усадили вокруг стола. Король сказал: «Я притронусь ко лбу каждого из вас и оставлю на нем либо черную, либо белую метку. Затем прикажу снять повязки с ваших глаз. Тот, кто увидит больше черных меток, чем белых, пусть встанет и стоит до тех пор, пока кто-нибудь не угадает, какая метка на лбу у него самого. Угадавший будет моим наследником». Когда повязки были сняты и юноши посмотрели друг на друга, то все они встали и стали размышлять. Наконец один из юношей воскликнул: «Государь, у меня на лбу черная метка!» И рассказал, как он решил нелегкую задачу. Какие метки сделал король на лбах четырех юношей? Как победитель соревнования доказал, что у него на лбу черная метка?
- 4.65. При проходе поезда через туннель угольная пыль проникла в вагон, и часть пассажиров оказалась со следами сажи на лице. Проходивший через вагон кондуктор сказал: «Граждане, среди вас есть запачкавшиеся. Вымыться можно в умывальной, но только во время стоянки поезда». Через четыре остановки все пассажиры были чисты. Сколько в вагоне было запачкавшихся, если известно:
- 1) зеркал в вагоне нет;
 - 2) пассажир идет мыться только тогда, когда он убежден, что запачкан;
 - 3) в умывальной во время одной стоянки может вымыться любое число пассажиров;
 - 4) все пассажиры умеют из наблюдений делать правильные выводы.
- 4.66. В игру мудрецов играют пять гномов. Им показали три красных и четыре синих капюшона. В темноте на них надели три красных и два синих капюшона, а остальные спрятали. Кто из гномов может определить цвет надетого на него капюшона?

- 4.67.** В игру мудрецов играют пять гномов. Им показали три красных и четыре синих капюшона. В темноте на них надели два красных и три синих капюшона, а остальные спрятали.
Кто из гномов может определить цвет надетого на него капюшона?
- 4.68.** В игру мудрецов играют три гнома. Им показали три красных и три синих капюшона. В темноте на них надели два красных и один синий капюшон, а остальные спрятали.
Может ли кто-нибудь из гномов определить цвет надетого на него капюшона?
- 4.69.** В игру мудрецов играют восемь гномов. Им показаны пять красных, четыре синих и два белых капюшона. В темноте на них надели четыре красных, два синих и два белых капюшона, а остальные спрятали.
Может ли кто-нибудь из гномов определить цвет надетого на него капюшона?
- 4.70.** Участников игры мудрецов три, им предъявлены перед началом игры пять колпаков: три красных и два белых.
Определите, кто будет победителем, если:
1) на двух участников надеты белые колпаки, а на третьего — красный;
2) на одного участника надет белый колпак, а на двух других участников — красные колпаки.
- 4.71.** Участников игры мудрецов семь, а перед началом игры им предъявлено восемь красных колпаков и четыре белых. Определите, кто будет победителем, если:
1) на них надеты четыре красных колпака и три белых;
2) на них надеты шесть красных колпаков и один белый.
- 4.72.** Участников игры мудрецов восемь, а перед началом игры им предъявлено пятнадцать колпаков: пять красных, шесть белых и четыре синих. Определите, кто будет победителем игры, если на них надето три красных, два белых и три синих колпака.
- 4.73.** Четыре человека сидят друг за другом так, что сидящий сзади видит головы трех впереди сидящих, предпоследний видит головы двух впереди сидящих, второй видит голову впереди сидящего. Оборачиваться им запрещено. Они знают, что есть семь шляп: три белых и четыре черных. Каждому из них на голову надевают шляпу так, что он не видит, какого цвета шляпа ему надета, и не знает, какие шляпы остались. Докажите, что, каким бы образом ни были надеты шляпы, всегда найдется по крайней мере один из них, который может вполне определенно сказать, какого цвета шляпа у него на голове.

§ 5.1. Взвешивания

Приступим к рассмотрению задач на выделение элемента с заданными свойствами. Прежде всего это задачи, вероятно знакомые многим читателям, на нахождение фальшивой монеты в куче настоящих с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь.

Введем условные обозначения:

$=$ — весы находятся в равновесии;

\neq — весы находятся в неравновесии;

$/$ — левая чашка весов тяжелее;

\backslash — правая чашка весов тяжелее.

Начнем с задач, в которых известно, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая.

Примеры 5.1—5.3 образуют цепочку, в которой предыдущий пример используется при решении следующего.

Пример 5.1. Имеется три кольца, внешне неразличимые, из них два настоящие, одинаковой массы, одно фальшивое, легче настоящих. Можно ли найти фальшивое кольцо с помощью одного взвешивания на правильных чашечных весах без гирь?

Решение. Занумеруем кольца числами 1, 2, 3. Положим первое кольцо на левую чашку весов, второе — на правую чашку. Возможны два исхода (рис. 5.1).

Весы могут оказаться в равновесии. Тогда первое и второе кольца — настоящие. Следовательно, фальшивым является третье кольцо.

Весы могут оказаться в неравновесии. В этом случае фальшивым является или первое, или второе кольцо. Какое же именно? То, которое легче.

Ответ. Можно.

Пример 5.2. Имеется девять монет, из них восемь настоящих, одинаковой массы, одна фальшивая, тяжелее остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету?

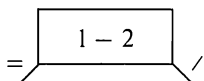


Рис. 5.1

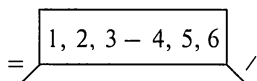


Рис. 5.2

Решение. Занумеруем монеты натуральными числами от 1 до 9. Здесь монеты лучше взвешивать, кладя на каждую чашку весов по три. Положим на левую чашку монеты с номерами 1, 2, 3, на правую — монеты с номерами 4, 5, 6. Теперь, как и в примере 5.1, возможны два исхода (рис. 5.2).

Пусть весы находятся в равновесии. Тогда фальшивая монета находится в тройке с номерами 7, 8, 9, и найти ее можно с помощью еще одного взвешивания (см. пример 5.1).

Пусть весы находятся в неравновесии. В этом случае фальшивая монета находится в той из двух первых троек, которая тяжелее, и найти ее можно также с помощью еще одного взвешивания.

Итак, понадобилось два взвешивания. А нельзя ли было достичь цели за одно? Для ответа на этот вопрос нужно изменить систему взвешиваний, положив на каждую чашку весов не по три, а по четыре или по две, или даже по одной монете. Но каждый из указанных вариантов менее выгоден, чем тот, который мы разобрали.

О т в е т. За два.

Пример 5.3. Имеется десять монет, из них девять настоящих, одинаковой массы, одна фальшивая, легче остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету?

Решение. Занумеруем монеты. На левую чашку весов положим монеты с номерами 1, 2, 3, а на правую — с номерами 4, 5, 6. Дальше можно использовать рисунок 5.2.

Если весы окажутся в равновесии, то фальшивая монета находится в оставшейся четверке. На четыре монеты требуется еще два взвешивания (см. пример 5.1).

Если весы будут в неравновесии, то фальшивая монета находится в той из этих двух троек, которая легче. Тогда для ее определения нужно еще одно взвешивание.

В общем случае здесь понадобилось три взвешивания. Но нельзя ли было обойтись двумя? Попробуем положить на каждую чашку весов по четыре монеты (другие варианты явно хуже). Но фаль-

шивая монета может оказаться в одной из этих четверок, а тогда потребуются еще два взвешивания — итого тоже три.

О т в е т. За три.

Подведем итог разобранным примерам. Для определенности будем говорить только о монетах. Если монет 2 или 3, то для нахождения среди них фальшивой монеты требуется 1 взвешивание.

Если монет в кучке от 4 до 9 включительно, то наименьшее число взвешиваний для нахождения фальшивой монеты равно 2. Если монет от 10 до 27 включительно, то оно равно 3. Если монет от 28 до 81 включительно (в связи с тем, что $81 = 3 \cdot 27$), то наименьшее число взвешиваний равно 4.

Теперь попробуем догадаться, какова общая закономерность. Числа 9, 27, 81 являются последовательными степенями тройки, а числа 4, 10, 28 — соответственно предыдущими степенями тройки, увеличенными на 1:

$$4 = 3 + 1, \quad 10 = 3^2 + 1, \quad 28 = 3^3 + 1.$$

Сформулируем без доказательства общий результат разобранных задач, причем для единообразия будем вести речь только о монетах.

■ **Т е о р е м а 5.1.** Пусть число монет k удовлетворяет неравенству

$$3^{n-1} < k < 3^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и среди них имеется одна фальшивая, о которой известно: легче она или тяжелее, чем настоящие. Тогда наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь, необходимых для нахождения фальшивой монеты, равно n .

Перейдем к более сложным задачам на нахождение фальшивой монеты, когда фальшивая монета отличается по массе от настоящих, но неизвестно, в какую сторону — легче она или тяжелее, чем настоящие.

Очевидно, что если монет в кучке всего две, то найти фальшивую монету с помощью взвешиваний в этом случае не удастся.

П р и м е р 5.4. Имеется три монеты, внешне неразличимые, из них две настоящие, одинаковой массы, одна фальшивая, отличающаяся по массе от остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету?

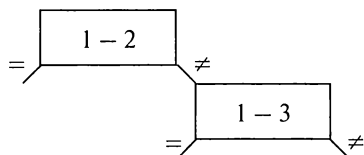


Рис. 5.3

Решение. Занумеруем монеты. При первом взвешивании положим на левую чашку весов первую монету, на правую — вторую. Рассмотрим следующую систему взвешиваний (рис. 5.3). Понимать ее нужно так.

В случае равновесия фальшивой является третья монета.

В случае неравновесия взвешиваем одну из «старых» монет — первую или вторую с третьей. Если при втором взвешивании, например, первой монеты с третьей получится равновесие, то фальшивая монета — вторая. Если же будет неравновесие, то фальшивой является первая монета, так как неравновесие при обоих взвешиваниях можно объяснить только участием в каждом из них первой монеты.

О т в е т. За два.

Пример 5.5. Имеется пять деталей, внешне неразличимых, из них четыре стандартных, одинаковой массы, одна бракованная, отличающаяся по массе от остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти бракованную деталь?

Решение. Занумеруем детали. А теперь попробуйте разобраться в приводимой ниже схеме взвешиваний (рис. 5.4).

Как видно, для нахождения бракованной детали потребовалось три взвешивания.

О т в е т. За три.

Какой общий результат стоит за этими задачами? Сформулируем его без доказательства. Для единообразия опять будем говорить о монетах.

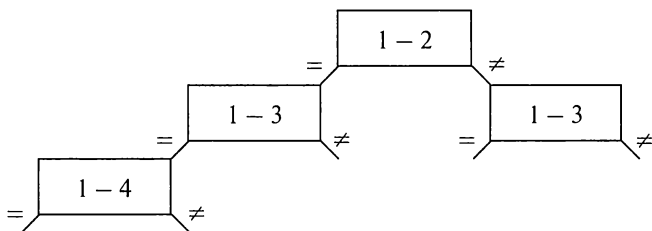


Рис. 5.4

■ **Теорема 5.2.** Пусть число монет k удовлетворяет неравенству

$$\frac{3^n - 1 - 3}{2} < k \leq \frac{3^n - 3}{2}, n \in N,$$

и среди них имеется одна фальшивая, о которой известно только, что она отличается по массе от остальных. Тогда наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь, с помощью которых можно найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящие, равно n .

Данная теорема справедлива при любом натуральном n . В частности, положив в последнем неравенстве $n = 3$, получим $3 < k \leq 12$. Следовательно, для любого числа монет в пределах от 4 до 12 включительно наименьшее число взвешиваний, позволяющих найти фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее, чем настоящие, равно 3.

Возникает вопрос: а не противоречит ли только что сформулированная теорема, например, решению примера 5.4? Ведь в этом примере в одном из случаев, когда бракованной оказывается пятая деталь (см. рис. 5.4), мы так и не узнали, является ли она более легкой или более тяжелой, чем стандартная. Подумайте сами, как здесь изменить систему взвешиваний для того, чтобы за три взвешивания не только найти бракованную деталь, но и ответить на последний вопрос.

Перейдем к другим задачам на нахождение предмета с помощью взвешиваний, когда, например, в куче монет имеется более одной фальшивой монеты, а также к задачам, при решении которых используются весы с гирями или со стрелкой.

Пример 5.6. Имеется шесть одинаковых по виду монет, но из них четыре настоящие, одинаковой массы, а две фальшивые, более легкие, они также весят одинаково. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти обе фальшивые монеты?

Решение. Как обычно, занумеруем монеты. При первом взвешивании на левую чашку весов положим монеты с номерами 1, 2, 3, на правую — все остальные (рис. 5.5).

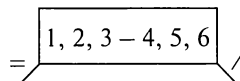


Рис. 5.5

Весы могут оказаться в равновесии. Тогда каждая из троек содержит по одной фальшивой монете. Для того чтобы их найти, нужно еще два взвешивания (см. решение примера 5.1).

Весы могут быть в неравновесии. Здесь обе фальшивые монеты содержатся в одной тройке — той, которая легче (в данном случае — на левой чашке). Потребуется еще одно взвешивание.

О т в е т. За три.

Пример 5.7. Контролер разложил 90 стандартных деталей в девять коробок поровну и в одну коробку — 10 бракованных деталей. Он не может вспомнить, в какой коробке лежат бракованные детали, но знает, что стандартная деталь весит 100 г, а бракованная 101 г. Как он может за одно взвешивание на весах с гирями найти коробку с бракованными деталями?

Р е ш е н и е. Занумеруем коробки. Из первой коробки возьмем одну деталь, из второй — две и т. д., из десятой — 10 деталей. Всего, таким образом, взято $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$ деталей.

Взвесим эти детали вместе. Если бы все они были стандартными, то весы показали бы $55 \cdot 100 = 5500$ г. Но в действительности они покажут больше — $5500 + n$ г, где $1 \leq n \leq 10$. Откуда взялись лишние n граммов? Из-за того, что в этой куче деталей имеются бракованные, а именно n деталей. Следовательно, бракованные детали находятся в n -й коробке.

Пример 5.8. Имеется четыре предмета разной массы. За какое наименьшее число взвешиваний на рычажных весах без гирь можно найти самый тяжелый и самый легкий из этих предметов?

Р е ш е н и е. Занумеруем предметы. При первом взвешивании положим на одну чашку весов первый предмет, на другую — второй; при втором сравним массы двух оставшихся предметов (рис. 5.6). При третьем взвешивании сравним массы двух более легких предметов этих пар (в данном случае — первого и четвертого), при следующем — двух более тяжелых (второго и третьего). Получилось, что самый легкий предмет — первый, самый тяжелый — третий.

При любой другой системе взвешиваний их число увеличивается, поэтому наименьшее число взвешиваний равно четырем.

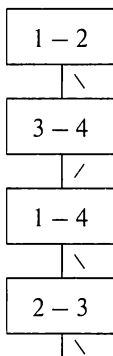


Рис. 5.6

О т в е т. За четыре.

Пример 5.9. Из 11 шаров два радиоактивных. За одну проверку про любую кучку шаров можно узнать, есть ли в ней радиоактивный шар, но при наличии такого шара нельзя узнать, сколько их — один или два. Как за семь проверок найти оба радиоактивных шара?

Решение. Занумеруем шары. Разделим их на три кучки: в одну включим шары 1—4, в другую — шары 5—8, в третью — 9—11. За три проверки для каждой из этих кучек установим, есть ли в ней радиоактивный шар; если при проверке двух кучек окажется, что в каждой из них имеется радиоактивный шар, то можно обойтись и двумя проверками. Теперь рассмотрим две возможности.

Пусть радиоактивные шары находятся в разных кучках. Для того чтобы найти радиоактивный шар в каждой из этих двух кучек, требуется не более двух проверок, а значит, для обеих кучек — не более четырех. Пусть радиоактивные шары находятся в одной кучке. А здесь хватит не более трех проверок.

Рассмотрим задачи на взвешивание на чашечных весах. Они близки к задачам на выделение элемента множества.

Пример 5.10. Среди 18 монет одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивая монета отличается по массе от настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно определить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая? (Находить фальшивую монету не нужно!)

Решение. Занумеруем монеты. Разобьем множество монет на три кучки, по шесть монет в каждой.

При первом взвешивании положим на одну чашку весов все монеты первой кучки, на другую — второй. Возможны два случая.

1) Пусть при этом взвешивании весы оказались в равновесии. Тогда фальшивая монета находится в третьей кучке.

Теперь положим на одну чашку весов первую кучку монет, на другую — третью.

Если, например, третья кучка перетянет, то фальшивая монета тяжелее настоящей.

2) Пусть при первом взвешивании весы были в неравновесии. Тогда фальшивая монета находится или в первой, или во второй кучке. Следовательно, все монеты третьей кучки — настоящие.

Положим на одну чашку весов первую кучку монет, на другую — третью. Если весы оказались в неравновесии, то фальшивая монета находится в первой кучке, и последнее взвешивание

покажет, легче она или тяжелее, чем настоящая. Если же весы оказались в равновесии, то фальшивая монета — во второй кучке, и по первому взвешиванию также можно определить, легче она или тяжелее настоящей.

О т в е т. За два.

Пример 5.11. Как взвесить груз на чашечных весах с гирями, если гири правильные, а весы неправильные?

Р е ш е н и е. Уравновесим груз гирями. Затем груз уберем, оставив гири на другой чашке весов, и заменим его таким новым набором гирь, чтобы весы снова оказались в равновесии. Груз весит столько, сколько весит этот набор.

Пример 5.12. Имеется четыре пакета разной массы и правильные чашечные весы без гирь. Как за пять взвешиваний расположить пакеты в порядке возрастания массы?

Р е ш е н и е. Занумеруем пакеты. Массы первого, второго, третьего и четвертого пакетов обозначим соответственно через m_1 , m_2 , m_3 и m_4 .

При первом взвешивании положим, например, на одну чашку весов первый пакет, на другую — второй; при втором взвешивании — на одну чашку весов первый, на другую — третий пакет; при третьем положим на чашки второй и третий пакеты. Это позволяет расположить первые три пакета в порядке возрастания массы. Пусть, например, второй пакет — самый легкий, а третий — самый тяжелый из трех (рис. 5.7):

$$m_2 < m_1 < m_3.$$

Теперь взвесим пакет, средний по массе из этих трех, в данном случае первый, с четвертым. Допустим, что четвертый пакет оказался тяжелее.

Из предыдущего следует, что самым тяжелым из всех четырех пакетов является или третий, или четвертый. Положим эти два пакета на разные чашки весов. Для определенности пусть более тяжелым оказался третий пакет. Тогда получаем:

$$m_2 < m_1 < m_4 < m_3.$$

Изложенный выше метод решения задач о взвешивании, разумеется, не является единственно возможным. Есть и другие. Это, в частности, метод, основанный на теоретико-информационном подходе (см., на-

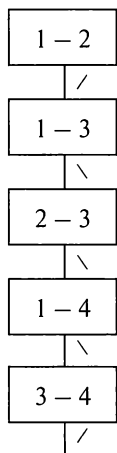


Рис. 5.7

пример, Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973), и метод Дайсона,¹ в котором используется троичная система счисления (см., например, Шестопал Г. Как обнаружить фальшивую монету // Квант. — 1978. — № 10).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- 5.1. Имеется четыре монеты, внешне неразличимые, из них три настоящие, одинаковой массы, одна фальшивая, тяжелее остальных. Как найти фальшивую монету с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь? А можно ли ее найти за одно взвешивание?
- 5.2. Имеется 1) 27; 2) 28 колец, из них одно фальшивое, легче остальных, остальные настоящие, одинаковой массы. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивое кольцо?
- 5.3. Имеется четыре монеты, из них три настоящие, одинаковой массы, одна фальшивая, отличающаяся по массе от остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету?
- 5.4. Имеется k деталей, из них $k - 1$ стандартная, одинаковой массы, одна бракованная, отличающаяся по массе от остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти бракованную деталь, если:
1) $k = 8$; 2) $k = 9$; 3) $k = 16$?
- 5.5. Имеется шесть кубов, внешне одинаковых. Три из них весят одинаково, три остальных — более легкие, они также весят одинаково. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить, какие кубы имеют одинаковую массу?
- 5.6. Среди пяти деталей четыре стандартные, одинаковой массы, одна бракованная, отличающаяся по массе от остальных. Имеется еще одна отмеченная стандартная деталь (эталон). Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти бракованную деталь?
- 5.7. В коробке лежали 10 настоящих монет и 11 фальшивых, причем каждая фальшивая монета на 1 г легче каждой из настоящих. Из коробки взяли одну монету. Как за одно взвешивание на весах со стрелкой и гирями определить, какая это монета — настоящая или фальшивая?
- 5.8. Имеется шесть камней разной массы. Как за восемь взвешиваний на рычажных весах без гирь можно найти самый тяжелый и самый легкий из этих камней?
- 5.9. Среди 1) 25; 2) 14 деталей одна бракованная, остальные — стандартные. Все стандартные детали весят одинаково, бракованная отличается по массе от стандартных. За какое наименьшее число взвешиваний на

¹ Дайсон Фримэн Джон (р. 1923) — американский физик и астроном.

правильных чашечных весах без гирь можно установить, легче или тяжелее бракованная деталь, чем стандартная?

- 5.10. Среди n монет (где $n > 2$) имеется одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивая отличается по массе от остальных. Докажите, что за два взвешивания на правильных чашечных весах без гирь можно определить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая.
- 5.11. Из 15 одинаковых с виду монет одна фальшивая. Неизвестно, она тяжелее или легче остальных. Как узнать, фальшивая монета тяжелее или легче настоящих, сделав не более двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?
- 5.12. Имеется три пакета разной массы и правильные чашечные весы без гирь. Всегда ли можно с помощью двух взвешиваний расположить пакеты в порядке возрастания масс?
- 5.13. Имеется пять пакетов разной массы. Как за семь взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь расположить их в порядке возрастания массы?
- 5.14. Среди 77 одинаковых колец одно несколько легче остальных. Найдите его не более чем четырьмя взвешиваниями на чашечных весах без гирь.
- 5.15. Из восьми одинаковых по виду колец одно несколько отличается по весу от других, причем неизвестно, легче или тяжелее это кольцо, чем остальные. Требуется найти это кольцо с помощью не более чем трех взвешиваний на чашечных весах без гирь.
- 5.16. Имеется 10 одинаковых по размеру и виду кубиков. Одни из них алюминиевые (более легкие), другие дюралевые (потяжелее). Определите число кубиков каждого вида с помощью не более шести взвешиваний на чашечных весах.
- 5.17. Имеется 10 кучек одинаковых на вид колец по 10 колец в каждой кучке. В девяти кучках каждое кольцо весит 10 г, а в одной кучке все кольца весят по 9 г. Требуется с помощью одного взвешивания на чашечных весах найти кучку, состоящую из колец весом в 9 г, полагая, что имеется достаточное число гирь различного веса.
- 5.18. Антиквар приобрел 99 одинаковых по виду старинных монет. Ему сообщили, что ровно одна из монет фальшивая — легче настоящих (а настоящие весят одинаково). Как, используя чашечные весы без гирь, за семь взвешиваний выявить фальшивую монету, если антиквар не решает никакую монету взвешивать более двух раз?
- 5.19. Имеется 68 монет, причем известно, что любые две из них различаются по весу. Как за 100 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь найти самую тяжелую и самую легкую монеты?

§ 5.2. Переливания

Приступим к рассмотрению весьма специфического класса задач на выделение подмножества с заданными свойствами. Это весьма популярные задачи о переливании.

Начнем с задач о наливании определенного количества жидкости с помощью двух (иногда трех) пустых сосудов. При этом разрешаются только две операции: опорожнить один сосуд и наполнить до краев другой.

Пример 5.13. Имеется два сосуда вместимостью 3 и 5 л. Как с помощью этих сосудов налить из водопроводного крана 4 л воды?

Решение. Задачи о переливании можно решать «от конца к началу». Будем исходить из того, что требуется сделать, и считать, что искомое уже найдено.

Как в результате можно получить 4 л?

— Из 5-литрового сосуда отлить 1 л.

Как это сделать?

— Надо в 3-литровом сосуде иметь ровно 2 л.

Как их получить?

— Из 5-литрового сосуда отлить 3 л.

Теперь запишем решение задачи в виде таблицы 5.1.

Поиск решения можно было начать с действия $3 + 1$, что привело бы к другому решению, приведенному в таблице 5.2.

Из чисел 3 и 5 можно составить два арифметических выражения, имеющих значение 4:

$$5 - 3 + 5 - 3 = 4 \quad \text{и} \quad 3 + 3 - 5 + 3 = 4.$$

Таблица 5.1

Емкость сосуда	Номер хода					
	1	2	3	4	5	6
5 л	5	2	2	—	5	4
3 л	—	3	—	2	2	3

Таблица 5.2

Емкость сосуда	Номер хода							
	1	2	3	4	5	6	7	8
5 л	—	3	3	5	—	1	1	4
3 л	3	—	3	1	1	—	3	—

Несложно убедиться, что полученные выражения соответствуют найденным выше решениям.

При решении задач о переливании можно руководствоваться общей тактикой.

Правило 5.1. Из каждой предыдущей ситуации получать новую, которой еще не было; так как сосуда всего два, то происходит движение только вперед, пока не будет достигнута требуемая ситуация.

При этом в зависимости от выбора первой операции возникают различные варианты решения.

С разобранным примером тесно связаны задачи, в которых требуется разделить имеющуюся в одном (иногда двух) сосудах жидкость с помощью одного или двух пустых сосудов. При этом, как и в предыдущем случае, разрешаются либо опорожнить один сосуд, либо наполнить до краев другой.

Рассмотрим, пожалуй, наиболее известную из задач такого рода, которая называется задачей Пуассона¹. Эту задачу Пуассон решил в юности и впоследствии говорил, что именно она побудила его стать математиком.

Пример 5.14. Один человек имеет в бочонке 12 пинт² вина и хочет подарить половину вина, но у него нет сосуда в 6 пинт, однако имеются два пустых сосуда объемом 8 пинт и 5 пинт. Как с их помощью отлить ровно 6 пинт вина?

Решение. Решение можно записать в виде таблицы 5.3.

Понимать это нужно так. Сначала оба сосуда пусты. Наполним сосуд объемом 8 пинт (первый столбец), затем из него наполним сосуд объемом 5 пинт (второй столбец), потом эти 5 пинт из меньшего сосуда выльем в бочонок, содержащий 12 пинт (третий столбец), затем 3 пинты вина из сосуда объемом 8 пинт перельем в сосуд емкостью 5 пинт (четвертый столбец) и т. д. до тех пор, пока в большем из двух сосудов не окажется 6 пинт вина.

Попробуйте решить задачу Пуассона иначе, наполнив сначала сосуд емкостью 5 пинт. Не получится ли решение короче?

Пусть (a, b, c) — упорядоченная тройка (кортеж длины 3), где a, b, c — количество вина в 12-пинтовом бочонке, в 8- и 5-пинтовых

¹ Пуассон Симеон Дени (1781—1840) — знаменитый французский математик, механик и физик.

² Пинта — старинная французская мера объема, 1 пинта $\approx 0,568$ л.

Таблица 5.3

Емкость сосуда	Номер хода						
	1	2	3	4	5	6	7
8 пинт	8	3	3	—	8	6	6
5 пинт	—	5	—	3	3	5	—

сосудах соответственно. Тогда указанное в таблице 5.3 решение может быть переписано в виде следующей цепочки:

$$(12, 0, 0) - (4, 8, 0) - (4, 3, 5) - (9, 3, 0) - (9, 0, 3) - (1, 8, 3) - \\ - (1, 6, 5) - (6, 6, 0).$$

Иногда вместо безуспешного непосредственного поиска решения задачи о переливании бывает полезно проверить: существует ли искомый вариант?

Пример 5.15. Можно ли, пользуясь двумя пустыми ведрами объемом 12 и 9 л, набрать из колодца ровно 4 л воды?

Решение. Так как начальные емкости ведер делятся на три, то при любом переливании из одного ведра в другое и набирании воды из колодца в каждом из них будет находиться количество воды с объемом, делящимся на три. Но поскольку четыре на три не делится, то 4 л воды получиться не могут.

Ответ. Нельзя.

Попытаемся обобщить последний пример. Пусть имеется два пустых сосуда объемом a и b л и требуется набрать из реки ровно c л воды (где a , b и c — натуральные числа, причем c не превосходит большего из чисел a и b). Если число c не делится на НОД(a , b), то, аналогично предыдущему, это сделать невозможно.

Ну а если c делится на НОД(a , b)? Можно доказать, что в таком случае задача всегда имеет решение. В частности, это всегда возможно, если НОД(a , b) = 1, т. е. числа a и b взаимно просты.

Легко сформулировать множество подобных задач. Но выписанные таблицы не дают ответа на вопрос: каким же правилом руководствоваться для нахождения решения? С целью найти такое правило давайте представим себе задачу иначе — геометрически.

Следующая популярная задача о переливании жидкости известна как задача Тартальи¹ (еще раньше такую задачу решал Шюке²).

¹ Тарталья Никколо (1499—1557) — итальянский математик.

² Шюке Никола (ок. 1445 — ок. 1500) — французский математик.

Пример 5.16. Имеется 8-литровый сосуд, до краев наполненный водой, и два пустых объемом 3 и 5 л. Требуется разлить воду поровну в два больших сосуда.

Решение 1. Сначала наполняем 5-литровый сосуд; из него отливаем 3 л в пустой сосуд. Эти 3 л снова выливаем в 8-литровый. Оставшиеся 2 л переливаем из 5-литрового в 3-литровый. Затем из 8-литрового вновь наполняем 5-литровый, а из него уже отливаем 1 л, наполняя до краев 3-литровый. В 5-литровом остается 4 л. Перелив воду из 3-литрового сосуда в 8-литровый, получаем и в нем 4 л воды.

При более сложных соотношениях емкостей сосудов решение не столь простое. Покажем, как его можно довести до автоматизма, используя специальный граф. Выберем на плоскости систему координат (необязательно прямоугольную). На одной оси отложим отрезок OC , равный пяти единицам масштаба, на другой — отрезок OA , равный трем единицам. Построим параллелограмм $OABC$ (рис. 5.8). Отметим на его сторонах точки с целочисленными координатами — это вершины графа. Соединим точки $(0; 1)$ и $(1; 0)$ отрезком и проведем параллельно ему отрезки, соединяющие отмеченные точки. Кроме того, соединим вершины графа, лежащие на противоположных сторонах параллелограмма, отрезками, параллельными координатным осям. Все эти отрезки являются ребрами построенного графа.

Выясним, как этот граф связан с задачей о переливании. Точка O соответствует тому состоянию, когда 5-литровый и 3-литровый сосуды пусты. Перемещение по ребру OC отвечает наполнению 5-литрового сосуда, а по ребру OA — наполнению 3-литрового. На сосудах нет никаких меток, поэтому процесс наливания заканчивается тогда, когда сосуд наполнен. Этому процессу соответствует движение по ребрам графа, параллельным координатным осям до границы параллелограмма $OABC$. Но можно часть воды перелить из одного сосуда в другой, либо вылить остаток из одного сосуда, либо долить другой сосуд до краев — этим операциям соот-

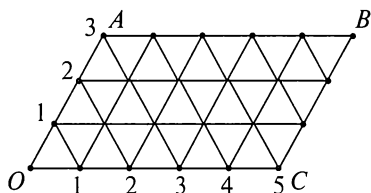


Рис. 5.8

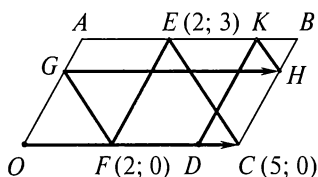


Рис. 5.9

ветствует перемещение из одной вершины графа в другую по диагональным ребрам.

Приведем решение задачи Тартальи с помощью графа.

Решение 2. Нужно выделить в данном графе маршрут, ведущий из вершины O в вершину D (рис. 5.9). Искомый маршрут отмечен сплошной линией. Прокомментируем его.

Ребро OC изображает наполнение 5-литрового сосуда (точка C имеет координаты $(5; 0)$);

CE : из 5-литрового вода переливается в 3-литровый (точка E имеет координаты $(2; 3)$, т. е. в 5-литровом осталось 2 л воды, а 3-литровый налит до краев);

EF : из 3-литрового вода выливается в 8-литровый (F имеет координаты $(2; 0)$);

FG : 2 л, находящиеся в 5-литровом, переливаются в 3-литровый;

GH : наполняется вновь 5-литровый;

HK : из него доливается недостающая часть в 3-литровый, в 5-литровом остается 4 л воды;

KD : из 3-литрового вода выливается в 8-литровый.

Для облегчения построения маршрута можно воспользоваться методом бильярдного шара. Для этого возьмем угол AOC нашего параллелограмма равным 60° и будем считать, что бильярдный стол выполнен в форме такого параллелограмма. Если учесть, что при ударе шара по бортику стола он продолжает движение по принципу: угол падения равен углу отражения, то шар, выпущенный из точки O вдоль одной из сторон стола, воспроизведет требуемый маршрут. Он будет двигаться по пути, изображенному на рисунке 5.9, если будет выпущен вдоль стороны OC .

Можно выбрать другой маршрут: начать движение по ребру OA (т. е. сначала наполнить 3-литровый сосуд). Этот маршрут менее экономичен; проверьте, что он требует на одно переливание больше, чем в приведенном решении.

Очевидно, таким способом можно решать задачи о переливании и с другими данными. Построив соответствующий граф, легко выяснить, имеет ли предложенная задача решение. В рассмотренном графе, выйдя из точки O , можно по его ребрам попасть в любую вершину. Поэтому, имея сосуды объемом 3 и 5 л, можно отмерить любое число литров от 1 до 5. Но при помощи сосудов объемом 4 и 6 л, удастся получить только 2, 4 и 6 л, в чем читатели могут убедиться, построив соответствующий граф. Это объясняется тем, что числа 3 и 5 взаимно простые, а числа 4 и 6 нет.

Приведенные нами рассуждения верны лишь при условии, что третий сосуд, изначально наполненный, имеет вместимость большую или равную суммарной вместимости пустых сосудов. В противном случае решение задачи связано с усеченным параллелограммом. Метод бильярдного шара позволяет решить аналогичную задачу и для четырех сосудов. Но в этом случае уже потребуются аналогичный пространственный граф.

З а м е ч а н и е. Графическое представление задачи и ее решения наглядно, однако выполнение всех построений отнимает лишнее время, требует бумаги и карандаша. Можно придерживаться рекомендации, как в любой подобной задаче найти требуемый способ (если он существует), не прибегая к построениям.

Правило 5.2. Прежде всего с помощью переливаний нужно добиться, чтобы по крайней мере два сосуда находились в граничном состоянии (каждый либо пуст, либо заполнен).

Правило 5.3. На каждом очередном шаге переливать жидкость из сосуда, который не участвовал в предыдущем переливании, при этом не изменять содержимого одного из сосудов, находящихся в граничном состоянии.

Если применение правил 5.2 и 5.3 не дает нам искомого распределения, то далее нужно поступать следующим образом.

Правило 5.4. Отправляясь от исходного, а также от граничных распределений совершать переливания, не приводящие к ранее встречавшимся распределениям, пока это будет возможно сделать или встретится искомое распределение. При этом в переливании должны участвовать сосуд, находящийся в граничном состоянии, и сосуд, не участвовавший в предыдущем переливании. Из геометрических соображений следует, что если это сделать можно, то только единственным способом.

Если применение правила 5.4 не приведет к искомому распределению, то значит переливаниями из исходного распределения перейти к нему невозможно.

Вопрос в задачах о переливании может быть совсем не похожим на те, которые были в предыдущих задачах, и носить, например, чисто комбинаторный характер.

Пример 5.17. Сколькими способами можно из бидона объемом 12 л, наполненного молоком, перелить молоко в другой пустой бидон того же объема с помощью двух пустых банок объемом 1 и 2 л? Переливание из банки в банку не допускается.

Решение. Обозначим через a_n число способов, которыми можно перелить молоко из заполненного бидона емкостью n л (где $n \in \mathbb{N}$) с помощью двух пустых банок емкостью 1 и 2 л.

Если вначале использовать банку емкостью 1 л, то в первом бидоне останется $(n - 1)$ л молока, и перелить его можно a_{n-1} способами.

Если же сначала использовать банку емкостью в 2 л, то останется $(n - 2)$ л, и перелить их можно a_{n-2} способами. Следовательно, получаем:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Этой рекуррентной формулой можно пользоваться только при $n > 2$.

Если бы вначале в бидоне было не 12, а 1 или 2 л молока, то перелить его в другой бидон можно соответственно одним или двумя способами:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2.$$

Введем еще нулевой член последовательности, полагая $a_0 = 1$. Тогда полученной формулой можно пользоваться и при $n = 2$:

$$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2.$$

Вычислив в последовательном порядке все члены от a_3 до a_{11} включительно, получим $a_{12} = 233$.

О т в е т: 233.

При решении этой задачи получилась последовательность

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots,$$

у которой два первых члена равны 1, а каждый последующий, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Она играет важную роль в теории чисел и называется последовательностью Фибоначчи¹.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- 5.20.** Как, имея лишь два сосуда емкостью 5 и 7 л, налить из водопроводного крана ровно 6 л воды?
- 5.21.** Имеются два сосуда вместимостью 8 и 5 л. Как с помощью этих сосудов налить из водопроводного крана 7 л воды?
- 5.22.** Имеются два пустых бидона — 3-литровый и 5-литровый. Как, пользуясь этими бидонами, набрать из реки ровно 1 л воды?

¹ Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1180—1240) — итальянский математик.

- 5.23. Как, пользуясь двумя пустыми ведрами объемом 12 и 7 л, а также водопроводным краном и раковиной, налить ровно 1 л воды?
- 5.24. Каким образом можно принести из реки ровно 6 л воды, если имеется только два ведра: одно — емкостью 4 л, другое — 9 л?
- 5.25. Как с помощью 7-литрового ведра и 3-литровой банки налить в кастрюлю ровно 5 л воды?
- 5.26. Во фляге содержится не менее 10 л молока. Как отлить из нее ровно 6 л молока с помощью пустых 9-литрового ведра и 5-литрового бидона?
- 5.27. В бочке находится не менее 13 ведер бензина. Как отлить из нее 8 ведер с помощью 9-ведерной и 5-ведерной бочек?
- 5.28. Как из бочки с квасом налить ровно 3 л кваса, пользуясь пустыми 9-литровым ведром и 5-литровым бидоном?
- 5.29. Как с помощью двух пустых бидонов емкостью 17 и 5 л отлить из молочной цистерны ровно 13 л молока?
- 5.30. В первый сосуд входит 9 л, во второй — 5 л, а в третий — 3 л. Первый сосуд наполнен водой, а остальные два пусты. Как с помощью этих сосудов отмерить 1 л воды? Как отмерить 4 л воды?
- 5.31. Имеется 10-литровый сосуд с молоком и два пустых на 3 и 7 л. Как разлить молоко поровну? Как отлить 2 л молока?
- 5.32. 12-ведерная бочка наполнена керосином. Как разлить его на две равные части, пользуясь 5-ведерной и 8-ведерной бочками.
- 5.33. В бидоне находится 18 л подсолнечного масла. Имеются два пустых ведра объемом по 7 л, в которые нужно налить по 6 л масла. Кроме того, есть черпак объемом 4 л. Как можно выполнить разлив?
- 5.34. В первый сосуд входит 8 л, и он наполнен квасом. Имеются еще 2 пустых сосуда емкостью 5 и 3 л. Как отлить 1 л кваса?
- 5.35. Керосин находится в 16-ведерной бочке. Как разлить его на две равные части, пользуясь 11-ведерной и 6-ведерной бочками?
- 5.36. Полный бочонок 42-ведерный, пустые — 27- и 12-ведерные? Как разлить первый на две равные части?
- 5.37. Имеются три бочонка вместимостью 6, 3 и 7 ведер. В первом и третьем содержится соответственно 4 и 6 ведер кваса. Требуется, пользуясь только этими тремя бочонками, разделить квас поровну на две части.
- 5.38. Три мошенника украли в магазине бутыл с бальзамом и три пустых флакона для дележа добычи. В укромном месте они прочитали надписи, сделанные на бутылки и флаконах, и узнали, что бутылка вмещает 30 унций, а флаконы — 14, 12 и 6 унций¹ соответственно. Как им разделить добычу поровну?
- 5.39. В бидон емкостью более 10 л нужно налить из реки ровно 10 л воды, пользуясь двумя пустыми банками емкостью 2 и 3 л. Сколькими способами можно это сделать? Переливание из банки в банку не допускается.

¹ Унция — единица массы в системе английских мер, 1 унция = 28,35 г (от *лат. uncia*).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Глава 1. КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ

1.1. Нет.

1.2. Множество подмножеств данного множества.

1.4. $A = \{1, 2\}$; $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{0\}$.

1.5. $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, 0, 1\}$; $A \cap B = \{0, 1\}$, $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1\}$, $A \setminus B = \{-1\}$, $B \setminus A = \{-2\}$.

1.6. \emptyset ; A ; A ; \emptyset ; \emptyset .

1.7. 1) $(A \cap B) \cup A = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A$;

2) $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$;

3) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap U) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (C \cup U) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B \cap U) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

1.8. 1) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = (A \cap A) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap A) \cup (B \cap \bar{B}) = A \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap A) \cup \emptyset = A \cup (B \cap A) \cup (\bar{B} \cap A) = A \cup (B \cup \bar{B}) \cap A = A \cup (U \cap A) = A \cup A = A$;

2) $\overline{A \cap (\bar{B} \cap C)} \cap \overline{(\bar{A} \cap B)} \cap (\bar{A} \cap C) = (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap C) = ((A \cup B) \cup \bar{C}) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap C) = A \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap C) \cup B \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap C) \cup (A \cup \bar{B}) \cap \bar{A} \cap (C \cap \bar{C}) = (A \cap \bar{A}) \cap (A \cup \bar{B}) \cap C \cup (B \cap (A \cap \bar{A})) \cap C \cup (B \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap C) \cup (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap \emptyset) = \emptyset \cap (A \cup \bar{B}) \cap C \cup ((B \cap \emptyset) \cap C) \cup (\emptyset \cap \bar{A} \cap C) \cup \emptyset = \emptyset$;

3) $A \cup B = A \cup (U \cap B) = A \cup (A \cup \bar{A}) \cap B = A \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = ((A \cap U) \cup (A \cap B)) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cap (U \cup B) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cap U) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup (\bar{A} \cap B)$.

1.9. 1) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (A \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C) = (A \cap U) \cup (A \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C) = A \cap (U \cup C \cup B) \cup (B \cap C) = (A \cap U) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C) \subseteq A \cup B \subseteq A \cup B \cup C$;

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \supseteq (A \cap B) \supseteq (A \cap B \cap C)$ (см. задачу 1.7, 3));

3) так как $A \supseteq (A \cap \bar{B})$ и $B \supseteq (\bar{A} \cap B)$, то $(A \cup B) \supseteq (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

1.10. 1) A ; 2) B ; 3) U ; 4) \emptyset .

1.11. $\{1; 61; 121; \dots; 841\}$.

1.12. $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ или $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{1; 2; 3\}$; $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2; 3; 5\}$ или $A = \{1; 2; 3; 5\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

1.13. $A = \{1; 2; 5; 6; 9\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{2; 3; 4; 5; 7; 8\}$ или $A = \{1; 2; 5; 6; 9\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{2; 3; 4; 5; 8\}$.

1.14. Следует. Р е ш е н и е. Так как $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$, $A \cup B \subseteq C$, то отсюда $A \subseteq C$, $B \subseteq C$. Так как $A \subseteq A \cup C$, $C \subseteq A \cup C$, $A \cup C \subseteq B$, то $A \subseteq B$, $C \subseteq A$.

Поскольку $B \subseteq B \cup C$, $C \subseteq B \cup C$, $B \cup C \subseteq A$, то $B \subseteq A$, $C \subseteq A$.

Из включений $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ вытекает, что $A = B$, а из включений $C \subseteq A$ и $A \subseteq C$ — что $A = C$. Значит $A = B = C$.

1.15. У к а з а н и е. Достаточно привести контрпример.

1.16. Не следует. У к а з а н и е. Достаточно привести контрпример или применить круги Эйлера.

1.17. По условию 1) среди владельцев телевизоров заведомо есть не маляры. По условию 2) ни один из них не может ежедневно купаться в бассейне (ибо не маляры, ежедневно купающиеся в бассейне, не имеют телевизоров), значит, утверждение 3) справедливо (не все владельцы телевизоров ежедневно купаются в бассейне).

1.18. 18.

1.19. 13.

1.20. 7. У к а з а н и е. Задачу лучше решать непосредственно с помощью кругов Эйлера, а не с помощью формулы включений и исключений.

1.21. $5,5 \text{ м}^2$.

1.22. 8.

1.23. У к а з а н и е. Докажите, что на основании трех последних условий задачи в отделе должны работать не менее 21 человека.

1.24. Р е ш е н и е. Пусть A — множество лицеистов, посещающих занятия кружка по физике, а B — по математике. В случае 1) $A \cap B = \emptyset$ и, следовательно,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 20 + 30 = 50.$$

В случае 2) $A \cap B \neq \emptyset$, и по формуле включения и исключения имеем

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 30 - 10 = 40.$$

1.25. Самый длинный список — третий. Первый список совпадает со вторым, если никто не решил вторую задачу; первый с третьим — если никто не решил только вторую задачу; первый с четвертым — если никто не решил только первую задачу; второй с третьим — если никто не решил две задачи; третий с четвертым — если никто не решил ровно одну задачу; второй список с четвертым совпадать не могут.

1.26. 3; 5; 1.

1.27. 68.

1.28. Р е ш е н и е. Пусть A — множество опрошенных, которые пьют кофе, B — множество любителей чая. По условию

$$n(A) = 78, n(B) = 71, n(A \cap B) = 48.$$

Подставив в формулу (1.3) значения $n(A)$, $n(B)$ и $n(A \cap B)$, получим $n(A \cup B) = 78 + 71 - 48 = 101$. Но опрошено было 100 человек, следовательно, отчет содержит ошибку.

1.29. 10.

1.30. 26.

1.31. 42.

1.32. 1) 6; 2) 15.

1.33. Пусть S_k — число читателей, прочитавших ровно k книг библиотеки, тогда общее количество читателей равно S , где

$$S = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \dots + (-1)^{n-1} S_n.$$

1.34. Гномы, начиная с первого места, выстроились соответственно в порядке $Г, Д, Л, А, Б, Е, К, В$.

1.35. Команды, начиная с первого места, расположились соответственно в порядке $Д, Е, Б, В, Г, А$. Р е ш е н и е. Нужно упорядочить множество, состоящее из элементов $А, Б, В, Г, Д, Е$.

Из первого условия задачи следует, что команды $А, Б, Д$ расположены так: впереди $Д$, за $Д$ идет $Б$, а за $Б$ следует команда $А$. Далее команда $Е$ опередила $Б$, но отстала от $Д$. Значит, команда $Е$ расположена между командами $Д$ и $Б$.

Остается выяснить расположение команд $Г$ и $В$. Так как $А$ отстала от $Б$ на три места, то команды $В$ и $Г$ должны быть расположены между командами $Б$ и $А$. Так как команда $В$ находится между $Г$ и $Д$, то команда $В$ идет после команды $Б$, а команда $Г$ — после команды $В$, но впереди команды $А$.

1.36. Р е ш е н и е. Установим возраст Бори. Ясно, что в детский сад ходит пятилетний ребенок. По условию задачи это девочка. Значит, Боре больше пяти лет. Так как Аня старше Бори, то Боре не может быть 15 лет. Сумма лет Ани и Веры делится на 3. С учетом возраста детей в семье это возможно в двух случаях:

1) Одной девочке 5 лет, а другой — 13 лет.

2) Одной девочке 8 лет, а другой — 13 лет.

В обоих случаях одной девочке 13 лет. Следовательно, Боре не 13 лет. Итак, Боре не 5, не 13 и не 15 лет. Значит, Боре 8 лет.

Теперь установим возраст каждой девочки. Сумма лет Ани и Веры делится на три, и это возможно в случае, когда одной девочке 5, а другой — 13 лет. Но по условию задачи Аня старше Бори. Поэтому Ане 13 лет, Вере 5 лет. При этом Гале 15 лет.

1.37. Больше всех поймал рыбы Дима, за ним следует Алик, за Аликом следует Коля, а меньше всех поймал Лена.

1.38. Владимир, Борис, Аркадий, Николай.

1.39. Удалов играет с Грубиным, Ложкин — с Погосяном. Самый старший — Ложкин, далее Погосян, Удалов и Грубин.

1.40. Р е ш е н и е. Естественно, до разбивки участников катания на пары построить их по росту. Изобразим построение цепочкой кружков с инициалами участников катания. Учитывая условия задачи, получим рисунок 1.

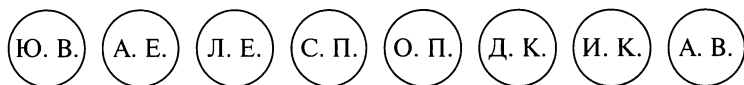


Рис. 1

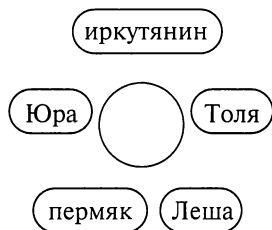


Рис. 2

Из этой цепочки ясно:

1) что Юра Воробьев должен кататься с Люсей Егоровой, иначе Люся Егорова останется без партнера, рост которого выше роста Люси;

2) Андрей Егоров должен кататься с Олей Петровой, иначе Оля останется без соответствующего партнера;

3) Сережа Петров должен кататься с Инной Крымовой, в противном случае он будет кататься с Аней Воробьевой, а Инна Крымова должна будет

кататься со своим братом Димой Крымовым, что противоречит условию задачи;

4) наконец, Дима Крымов должен кататься с Аней Воробьевой.

1.41. Р е ш е н и е. Изобразим место каждого мальчика за столом по условию задачи (рис. 2), откуда следует, что иркутянином может быть либо Витя, либо Коля. Но Коля никогда не был в Иркутске. Значит, иркутянин — Витя, а Коля пермяк. Юра не пермяк и не иркутянин. Кроме того, по условию задачи он никогда не бывал ни в Москве, ни в Курске. Значит, Юра живет в Туле. Так как по условию задачи курянин с Толей регулярно переписываются, то Толя не курянин и, значит, Толя живет в Москве, а Леша — в Курске.

1.42. Р е ш е н и е. Ясно, что в компании четырех супружеских пар жены за день выпили 14 стаканов, а их мужья — 30 стаканов лимонада.

Пусть мужья Анны, Марии, Софьи и Дарьи выпили соответственно в a , m , c и d раз стаканов лимонада больше, чем их жены. Тогда из условия задачи следует равенство

$$2a + 3m + 4c + 5d = 30. \quad (*)$$

Легко показать, что $d = 1$, $c \leq 2$, $m \leq 3$, $a \leq 4$. Например, если $d = 2$, то сумма $2a + 3m + 4c \geq 21$, а из равенства (*) следует, что она равна 20, и исходное равенство не выполняется. Так как $d = 1$, $a \leq 2$, то $c = 2$. Аналогично $m = 3$, $a = 4$. Значит, Андреев — муж Дарьи, Борисов — муж Софьи, Васильев — муж Марии, а Груздев — муж Анны.

1.43. Р е ш е н и е. Для упорядочения множеств отцов и детей, указанных в задаче, будем изображать кабины «колеса обозрения» в виде прямоугольников и в них вписывать имена детей и отцов.

Первые данные задачи позволяют изобразить их так:

1)

Леня — сын ... Алексей Иванович — отец ...

2)

Андрей — сын — отец Коли

3)

Тима — сын — отец Андрея

4)

Коля — сын — отец ...

Кроме того, известно, что Федор Семенович катался с сыном Валентина Петровича, а Валентин Петрович — с сыном Алексея Ивановича. Так как Алексей Иванович — отец не Лени, не Коли, не Андрея, то он отец Тимы. Но тогда ясно, что с Колей катался отец Лени.

Так как Тима — сын Алексея Ивановича, то с Тимой катался Валентин Петрович. Но тогда Валентин Петрович — отец Андрея.

Так как Федор Семенович катался с сыном Валентина Петровича, то он катался с Андреем, значит, он отец Коли. Теперь ясно, что Коля — сын Федора Семеновича.

Решение задачи можно записать в форме:

Леня — сын Григория Аркадьевича
Алексей Иванович — отец Тимы

Тима — сын Алексея Ивановича
Валентин Петрович — отец Андрея

Андрей — сын Валентина Петровича
Федор Семенович — отец Коли

Коля — сын Федора Семеновича
Григорий Аркадьевич — отец Лени

1.44. Р е ш е н и е. Будем обозначать места юношей в цепочке влюбленных кружками, а места девушек — квадратами, и в них будем записывать имена влюбленных. В силу условий задачи вся группа влюбленных представляет собой одну замкнутую цепь, звенья которой расположены в определенном порядке. Занумеруем их по ходу часовой стрелки (рис. 3).

Предполагается, что в этой цепочке юноша, занимающий место в круге 1, влюблен в девушку, занимающую место в квадрате 2, а девушка, занимающая место в квадрате 2, влюблена в юношу, занимающего место в круге 3 и т. д.

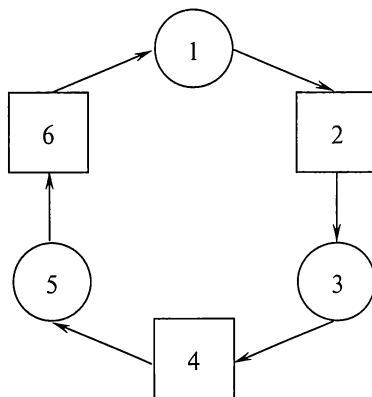


Рис. 3

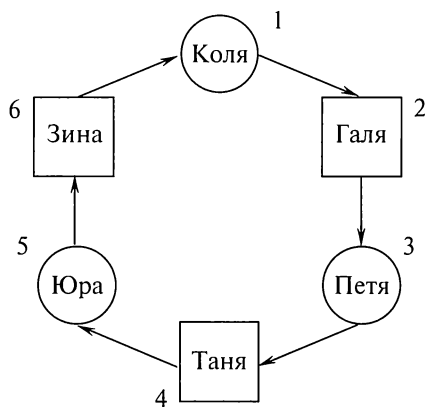


Рис. 4

Не нарушая общности рассуждений, предположим, что место в круге 1 занимает Коля, тогда по первому условию задачи место в квадрате 4 занимает Таня.

Рассмотрим возможные варианты размещения остальных участников группы. Здесь возможны два случая:

- 1) Петя занимает место в круге 5, а Юра занимает место в круге 3.
- 2) Петя занимает место в круге 3, а Юра занимает место в круге 5.

Но в первом случае по условию 2 Зина занимает место в квадрате 2, следовательно, она влюблена в Юру, что противоречит условию 3; значит, первый случай не возможен.

Во втором случае Зина занимает место в квадрате 6, значит, Галя занимает место в квадрате 2. Такое размещение влюбленных не противоречит условиям задачи. Решение может быть изображено на следующей схеме (рис. 4).

Таким образом, Коля влюблен в Гаю, Галя в Петю, Петя в Таню, Таня в Юру, Юра в Зину и Зина — в Колю.

1.45. *А* — 5-е место, *Б* — 2-е, *В* — 3-е, *Г* — 4-е, *Д* — 1-е место. У к а з а н и е. Рассмотрите два случая в зависимости от того, какая часть первого прогноза подтвердилась.

1.46. *В, Б, Д, Г, А, Е.* Р е ш е н и е. Первый болельщик не угадал мест *А* и *Д*, иначе их угадал бы и второй. Так как первый не угадал ни одной пары бегунов, которые последовательно финишировали, то он мог только угадать, что бегуны *Б, Г* и *Е* заняли соответственно второе, четвертое и шестое места.

Третий болельщик не угадал мест *Д, Е, А, Г, Б*, но тогда он угадал, что *В* займет первое место. Поскольку первый болельщик не угадал места *Д*, то *Д* занял третье место. Следовательно, *А* занял пятое место.

1.47. Математик.

1.48. О спорте.

1.49. На столе лежат: желтый квадрат, зеленый ромб, красный треугольник, синий круг.

Глава 2. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И СООТВЕТСТВИЯ

2.1. См. рис. 5.

2.2. $\{(25, 5), (25, 1), (16, 2), (16, 1), (7, 1), (6, 3), (6, 2), (6, 1)\}$. См. рис. 6.

2.3. $\{(\text{Мама}, \text{а}), (\text{мама}, \text{м}), (\text{папа}, \text{а}), (\text{папа}, \text{п}), (\text{рама}, \text{а}), (\text{рама}, \text{м}), (\text{рама}, \text{р}), (\text{яма}, \text{а}), (\text{яма}, \text{м}), (\text{яма}, \text{я})\}$.

2.4. Множество учеников, сидящих за данной партой; множество парт, за каждой из которых сидит хотя бы один ученик.

2.5. Множество всех треугольников, вписанных в эту окружность. Из одного (треугольник вписан лишь в одну окружность).

2.6. Сюръективно, всюду определено. Если X — множество простых чисел, то биективно (простое число делится лишь на себя), поскольку 1 в X не входит.

2.7. $(a, 1) \longleftrightarrow (1, a)$ и т. д.

2.8. Неинъективное. При замене X на Z инъективно.

2.9. Нет, да.

2.10. 1) Да; 2) нет; 3) нет.

2.11. 1) Нет; 2) да.

2.13. Нет. 1) Нет; 2) да.

2.14. Прямая является осью симметрии параболы. 1) Всюду определено; 3) инъективно; 4) сюръективно.

2.16. $A \cup \{1\}$.

2.17. Изобразить все стрелки, не входящие в R , и изменить их направление.

2.18. «Книгу y читал человек x »; «Человек x не читал книги y ».

2.21. В первом случае не обратно (x и y могут быть братьями), во втором случае — обратно.

2.22. «Точка x — центр окружности, вписанной в треугольник z ».

2.23. Область определения — множество мужчин, имеющих детей, множество значений — множество всех людей. «Быть отцом» сюръективно и инъективно, но не функционально и не всюду определено.

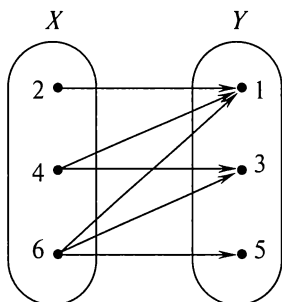


Рис. 5

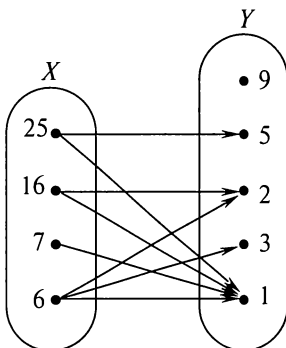


Рис. 6

- 2.24. 1) $[-4, 4]$; 2) $[10, \infty)$.
- 2.25. 2) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (5, 1), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$; 3) $\{(2, 1), (6, 3)\}$.
- 2.26. $R^{-1}(\{2, 3, 4\}) = \{2, 3, 4, 6, 8\}$.
- 2.27. Обратно «Больше», противоположно «Не меньше».
- 2.28. Обратно $x \leq \sqrt{y}$, противоположно $y < x^2$.
- 2.29. Область задания совпадает с множеством значений: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- 2.30. Точки $A(-1; -3)$, $B(0; 0)$, $C(1; 3)$.
- 2.31. График для RR^{-1} содержит все 16 пар слов $\{(\text{мама}, \text{мама}), (\text{мама}, \text{папа}), \dots, (\text{яма}, \text{яма})\}$. График для $R^{-1}R$ состоит из пар букв: $\{(a, a), (a, м), (a, п), (a, р), (a, я), (м, а), (м, м), (м, р), (м, я), (р, а), (р, м), (р, р), (п, а), (п, п), (я, а), (я, м), (я, я)\}$.
- 2.32. Равны.
- 2.34. Рефлексивно, антисимметрично, транзитивно.
- 2.44. Неверно.
- 2.45. Нет.
- 2.46. Да.
- 2.47. 1), 2).
- 2.48. Нет, так как равносторонние образуют подмножество в множестве равнобедренных.
- 2.49. Нет (пропущен нуль).
- 2.50. Нет, так как перпендикулярные прямые — подмножество пересекающих.
- 2.51. На классы, имеющие остатки 0, 1, 2, 3, 4.
- 2.52. Не пересекающихся с ней (считаем, что окружность касается себя).
- 2.53. Существительные, прилагательные, глаголы, причастия, деепричастия, числительные, союзы, предлоги, наречия, частицы, междометия.
- 2.54. Подлежащие, сказуемые, определения, дополнения, обстоятельства места и т. д., служебные слова.
- 2.56. Да.
- 2.57. На классы прямых, параллельных друг другу.
- 2.58. На классы окружностей, имеющих общий центр.
- 2.59. Нет, поскольку две горы могут иметь равные высоты.
- 2.60. Да.
- 2.62. A — тренер, B — строитель, B — журналист, G — врач.
- 2.63. Дори — 5, Нори — 3, Ори — 4. У к а з а н и е. Рассмотреть все возможные случаи в зависимости от того, кто получил оценку 5, или от того, чье высказывание оказалось верным.
- 2.64. Вадим — токарь, Сергей — слесарь, Николай — электрик, Антон — шофер.
- 2.66. В коробках, взятых в том же порядке, лежат соответственно мотки БЗ, ББ, ЗК, БК.

2.68. Журавлев — итальянским и испанским, Данилов — английским и немецким, Никольский — французским и арабским. У к а з а н и е. Используйте таблицу 4×7 .

2.69. Виктор. У к а з а н и е. Проще всего рассмотреть два случая — Виктор не виноват, Виктор виноват.

2.70. Борисов — токарь, Иванов — слесарь, Семенов — сварщик.

2.71. Коля Буров, Костя Семенов, Вася Николаев. Косте 18 лет, Коле 17 лет, Васе 16 лет.

2.72. Привалов в первый год отдыхал в июне.

2.73. Иванов — парикмахер, Петренко — мельник, Сидорчук — почтальон, Гришин — плотник, Капустин — маляр.

2.74. Кондратьев — столяр, Давыдов — маляр, Федоров — водопроводчик.

2.75. Корнев — врач, Докшин — инженер, Мареев — пекарь, Скобелев — милиционер.

2.76. Борисов — строитель, Кириллов — автомеханик, Данин — химик, Савин — радиотехник.

2.77. Дина Шевченко, Соня Бойченко, Коля Лысенко, Рома Савченко, Миша Карпенко.

2.78. Муж — учитель, жена — юрист, сын — слесарь, сестра мужа — инженер, отец жены — экономист. У к а з а н и е. В данной задаче считается, что женщины в футбол не играют.

2.79. Аркадьева преподает французский язык, Бабанова — немецкий язык, Корсакова — математику, Дашков — английский язык, Ильин — историю, Флеров — экономическую географию.

2.80. Андрей — бригадир, Петр — машинист, Дмитрий — проводник, Трофим — помощник машиниста.

2.81. Р е ш е н и е. Составим следующую таблицу (табл. 1).

Определим фамилии пассажиров способом исключения; будем по условиям задачи последовательно в горизонталях исключать отдельные фамилии (первые буквы их). Так, условия (1) и (6) позволяют зачеркнуть у москвича *А* и *Б*, у петербуржца по (2) — *Д*, у туляка по (3) и (4) — *В*, *Б* и *Е*, у пермяка по (5) и (6) — *А* и *В*, у одессита по (5) — *В*.

По (1) *А* — врач: зачеркиваем *А* у инженера и учителя; аналогично зачеркиваем *Д* у врача и инженера и *В* у врача и учителя.

Рассматривая вертикаль *В*, делаем два вывода: 1) фамилия киевлянина — Власов, и по (3) он инженер; 2) в горизонтали киевлянина можно зачеркнуть все буквы, кроме *В*. Теперь в вертикали *А* окажутся зачеркнутыми все *А*, кроме клетки одессита: 1) одессит — Агеев, и по (1) он врач, 2) в горизонтали одессита можно зачеркнуть все буквы, кроме *А*.

Буква *Д* окажется зачеркнутой 5 раз: пермяк — Дубов, учитель, и в его горизонтали все буквы, кроме *Д*, зачеркиваются. Тогда *Б* останется лишь один раз: Боков — петербуржец, учитель.

Продолжая, получим: Елисеев — москвич, врач; туляк — Громов, инженер.

Таблица 1

<i>Житель города</i>	<i>Профессия</i>	<i>Фамилия</i>
Москвич	Врач	А Б В Г Д Е
Петербуржец	Учитель	А Б В Г Д Е
Туляк		А Б В Г Д Е
Киевлянин		А Б В Г Д Е
Пермяк		А Б В Г Д Е
Одессит		А Б В Г Д Е

2.82. Р е ш е н и е. Перечислим факты, содержащиеся в условиях:

- 1) В 1-м туре полковник играл с десантником.
- 2) В 1-м туре летчик не играл.
- 3) Во 2-м туре пехотинец играл с ефрейтором.
- 4) Во 2-м туре майор играл со старшиной.
- 5) После 2-го тура капитан выбыл из турнира.
- 6) В 3-м туре был выходным сержант.
- 7) В 4-м туре был выходным танкист.
- 8) В 5-м туре был выходным майор.
- 9) В 3-м туре лейтенант играл с пехотинцем.
- 10) В 3-м туре полковник играл с артиллеристом.
- 11) В 4-м туре сапер играл с лейтенантом.
- 12) В 4-м туре старшина играл с полковником.
- 13) После 6-го тура доигрывалась партия десантника с минометчиком.

Составим и заполним таблицу участников турнира в сочетании с их специальностями, которые обозначим начальными буквами (табл. 2).

Плюсы в таблице указывают специальности участников турнира, а цифры в соответствующих клетках — номера условий, из которых следует исключение возможности данного сочетания. В таблице зарегистрировано 28 фактов, выявленных из условия задачи, а количество фактов, необходимых для решения задачи, также равно 28 ($7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$). Следовательно, лишних данных условие задачи не содержит.

Таблица 2

<i>Звание</i>	<i>П</i>	<i>Л</i>	<i>Т</i>	<i>А</i>	<i>Д</i>	<i>М</i>	<i>С</i>	<i>Х</i>
Полковник	9—10	1—2	7—12	10	1	1—13	11—12	+
Майор	3—4	—	7—8	+	—	—	—	—
Капитан	5—9	+	5—7	5—10	5—13	5—13	5—11	—
Лейтенант	9	—	7—11	9—10	+	—	11	—
Старшина	3—4	—	7—12	10—12	1—12	+	11—12	—
Сержант	6—9	—	6—7	6—10	—	—	+	—
Ефрейтор	3	—	+	—	—	—	—	—
Солдат	+	—	—	—	—	—	—	—

2.83. Петр — баскетболист, Геннадий — волейболист, Алексей — гимнаст, Владимир — легкоатлет.

2.84. *Б* и *Д*. У к а з а н и е. Рассмотрите пять случаев в зависимости от того, какой прогноз оказался полностью неверным.

2.85. Владимир преподает литературу в Туле, Игорь — физику в Ярославле, Сергей — математику в Рязани.

2.86. *А* и *Г* — лейтенанты танковых войск, *Б* — майор артиллерии, *В* — капитан артиллерии. У к а з а н и е. Рассмотрите два случая в зависимости от того, кто является капитаном — *В* или *Г*.

2.87. Фамилия машиниста Сидоров.

2.88. Валентин играет на контрабасе и учится на историческом факультете.

2.89. Василий Орлов учится на 4-м курсе, Борис Карпов — на 3-м курсе, Петр Крылов — на 1-м курсе, Николай Иванов — на 2-м курсе. У к а з а н и е. Персональные стипендии в вузе назначаются студентам не младше третьего курса, а производственная практика начинается после окончания второго курса.

2.90. Лодка «Шмель» принадлежит Виктору.

2.91. Морозов преподает историю и французский, Васильев — английский и биологию, Токарев — географию и математику.

2.92. Андреев — инженер, Борисов — шофер, Григорьев — токарь, Евдокимов — слесарь, Дмитриев — учитель, Золотарев — врач.

2.93. Р е ш е н и е. Солнце мешало вратарю Смирнову в первой половине состязания, которое закончилось со счетом 0 : 0. Значит, он стоял в воротах у северной трибуны.

После перерыва команды поменялись местами, следовательно, во второй половине игры Смирнов защищал уже «южные» ворота, находившиеся справа от радиокомментатора. Значит, он вратарь выигравшей команды, т. е. «Победы», так как команда «Салют» исключается (вратарь этой команды был в шляпе, значит, в игре не участвовал).

Егоров не мог быть вратарем команды «Звезда», так как он указал на ошибки вратарю проигравшей команды.

Отсюда следует: вратарь команды «Звезда» — Родин, «Победы» — Смирнов, «Салюта» — Егоров.

2.94. Борисов — писатель-историк, Алексеев — поэт, Константинов — драматург, Дмитриев — прозаик; Алексеев читал драму, Борисов читал прозу, Константинов читал книгу по истории, Дмитриев читал стихи.

Р е ш е н и е. Из условия задачи легко устанавливается: 1) историк читал прозу, прозаик читал поэзию, поэт читал пьесу, а драматург — книгу по истории; 2) Алексеев читал книгу Константинова, а Борисов читал книгу Дмитриева.

Чтобы установить, книги каких авторов читали Дмитриев и Константинов, следует рассмотреть два случая: а) Константинов читал книгу Алексева, а Дмитриев читал книгу Борисова; б) Дмитриев читал книгу Алексева, а Константинов читал книгу Борисова. Нетрудно показать, что случай а) приводит к противоречию. Действительно, так как Борисов — историк, то, с одной стороны, Борисов читает книгу Дмитриева, а с другой стороны, историк читает книгу прозаика. Значит, Дмитриев — прозаик. Но Дмитриев читает книгу Борисова (по предположению а)), а прозаик читает книгу поэта. Следовательно, Борисов — поэт. Последнее противоречит тому, что Борисов — историк. Случай б) дает следующее: по условию Борисов — историк. Так как Борисов читает книгу Дмитриева, а историк читает книгу прозаика, то Дмитриев — прозаик. Но Дмитриев читает книгу Алексева, а прозаик читает книгу поэта, следовательно, Алексеев — поэт. Так как Алексеев читает книгу Константинова, а поэт читает книгу драматурга, то Константинов — драматург.

2.95. Миссис Браун зовут Беатрис.

2.96. Атаров — Николай, Бартенев — Михаил, Данилин — Петр, Иванов — Олег, Кленов — Леонид.

Кленов знаком только с Данилиным, Бартенев знаком с Атаровым и Ивановым; Атаров знаком с Бартеневым, Данилиным и Ивановым; Данилин знаком с Атаровым, Ивановым и Кленовым; Иванов знаком с Атаровым, Бартеневым и Данилиным.

2.97. Хозяин грача — Попугаев, канарейки — Голубев, владелец попугая — Скворцов. Чайка живет у Воронова, ворон — у Канарейкина. Голубь принадлежит Грачеву, а скворец — Чайкину.

2.98. Лейтенант — пехотинец, капитан — связист, майор — танкист, полковник — артиллерист, генерал — сапер.

2.99. Р е ш е н и е. Так как в волейболе нет ничьих, то каждая игра для команды заканчивается либо выигрышем, либо проигрышем. Рассмотрим две команды, имеющие равное число побед. Обозначим через A ту из них, которая выиграла у второй (из двух рассматриваемых команд), а вторую команду — через B . Так как B имеет столько же побед, сколько A , а команде A она проиграла, то найдется команда C , у которой команда B выиграла, но которой A проиграла (иначе у B было бы меньше выигрышей, чем у A). Итак, искомые три команды найдены.

Глава 3. ВЫСКАЗЫВАНИЯ

3.1. Например: «Меня зовут Кили».

3.2. Ложно.

3.3. Ложно.

3.4. Предпоследнее.

3.6. $x = 2, y = 1, z = 4, t = 3$. Р е ш е н и е. Предположим, что $x = 1$. Тогда на основании пятого условия и $y = 1$, что невозможно.

Пусть $x \neq 1$. Применяя правило контрапозиции ко второму условию, получим: если $x \neq 1$, то $y \neq 2$ и $y \neq 3$. Значит, на основании третьего условия $z = 4$. Так как $y \notin \{2; 3; 4\}$, то $y = 1$.

Применим правило контрапозиции к четвертому условию: если $y = 1$, то $t \neq 2$. Следовательно, $t = 3$, откуда $x = 2$. Тогда и первое условие выполняется.

3.7. 2.

3.8. $(9; 2), (17; 6)$.

3.9. 1974.

3.10. 15, 30, 60. Р е ш е н и е. Если бы первое утверждение было ложно, то ложными были бы и третье, четвертое и шестое утверждения. Получилось четыре ложных утверждения, а это противоречит вопросу задачи. Значит, первое утверждение может быть только истинным. Аналогично доказывается, что истинно и второе утверждение. Но тогда истинно и четвертое утверждение.

Итак, три истинных утверждения — первое, второе и четвертое — у нас имеются. Остается перебрать все двузначные числа, кратные 15, с целью выяснить, для каких из них третье, пятое и шестое утверждения ложны.

3.11. $(-\infty; 2) \cup \left(2; \frac{15}{2}\right)$.

3.12. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], U\{1\}$.

3.13. 983, 989, 991, 997.

3.14. Андреев убирал 8-й класс, Давыдов — 9-й класс, Костин — 10-й класс, Савельев — 7-й класс.

3.15. Иванов из Братска, Петров из Шелехова, Дмитриев из Ангарска, Ефимов из Саянска, Сидоров из Нижнеудинска.

3.16. Первым был Николай Ложкин, а его тезка Белосельский сказал неправду.

3.17. Джон — старик, Браун — чиновник, Смит — мошенник. Преступление совершил Смит.

3.18. Задачу решили Алексеев и Кузин.

3.19. Корнелий поймал семь рыб, Саша — десять рыб, а Коля — девять.

3.20. Кейс украл Босс. Р е ш е н и е. Возможно три предположения о том, кто украл кейс. Рассмотрим их по очереди с тем, чтобы выяснить, какие из них противоречат условию.

1) Пусть кейс украл Арчи, тогда первое и третье его заявления не верны, а в условии сказано, что только одно из заявлений неверно. Значит, это предположение противоречит условию, Арчи не мог украсть кейс.

2) Пусть кейс украл Босс. Тогда первое его заявление не верно, следовательно, остальные два должны быть верны. Правда, во втором его заявлении как бы подразумевается, что он, Босс, не брал кейс, но прямо он этого не говорит и поэтому противоречие не возникает. Далее, третье заявление Арчи тогда неверно, следовательно, первые два должны быть верными. Раз верно второе заявление Арчи, то верно и третье заявление Весли, а так как верно первое, то второе неверно. Мы видим, что никаких противоречий с условием не возникает. Значит, Босс мог украсть кейс.

3) Пусть кейс украл Весли. Тогда первое его заявление неверно, а поэтому второе и третье верны. Раз верно третье заявление Весли, то верно и второе заявление Арчи. Первое и второе заявление Арчи также верны. Значит верны все три заявления Арчи, что противоречит условию. Весли не мог украсть кейс.

3.21. Ладейников, Пешкин, Слонов, Королев. Р е ш е н и е. Поскольку у Пешкина положение в турнирной таблице должно быть лучше, чем у Слонова, он не может занимать четвертое место. Тогда из прогноза второго болельщика следует, что Королев не может занять третье место. А из прогноза четвертого болельщика следует, что Королев не займет первого места и Слонов не займет второго места. (Вспомните, что Пешкин должен быть впереди Слонова по условию.)

Так как мы установили, что Слонов на втором месте быть не может, то из прогноза того же, четвертого, болельщика вытекает, что Ладейников тоже не выйдет на второе место.

На долю Королева остается два варианта: он может занять либо второе, либо четвертое место.

Проверим первое предположение. Если Королев займет второе место, то Слонов не должен быть на четвертом месте (см. прогноз третьего болельщика). Следовательно, на четвертом месте может оказаться только Ладейников — все остальные кандидаты уже отпали в ходе предыдущих рассуждений. А третье место должен занять Пешкин (см. прогноз третьего болельщика). Получается, что на первое место выйдет Слонов. Это противоречит условию, согласно которому Пешкин должен быть впереди Слонова. Следовательно, первое предположение ошибочно.

Проверим, что получится, если Королев будет занимать четвертое место. Тогда второе место должен занять Пешкин, а третье — Слонов. Победителем турнира окажется Ладейников. Все прогнозы учтены. Значит, второе предположение правильное.

3.22. Р е ш е н и е. Гриша утверждает, что биологию любят все, а Олег говорит, что всем нравится математика. Пусть оба эти утверждения верны, тогда первое, второе и третье утверждения Димы неверны. Трех общих увлечений у студентов быть не может, так как тогда первые три высказывания Димы будут ложны. Не может быть и так, чтобы у них не было ни одного общего увлечения. Следовательно, у трех друзей только одно общее увлечение и первое утверждение Димы — истинно.

Предположим, что третье утверждение Димы: «Каждый из нас любит различное сочетание дисциплин» — истинно. Выпишем все возможные комбинации из четырех предметов по три. Таких комбинаций четыре:

Биология — химия — история.

Биология — история — математика.

Биология — химия — математика.

Химия — история — математика.

Если единственный предмет, который любят все трое, — математика, то надо брать последние три комбинации. В этом случае первые три утверждения Гриши оказываются ложными. По этой же причине отпадают предположения о том, что все любят химию, и о том, что все любят историю. Следовательно, возможен единственный вариант: «Все любят биологию». Тогда третье высказывание Гриши — истинно. Проанализировав с учетом достигнутых результатов первые два высказывания Гриши, можно сказать, что они ложны. Следовательно, четвертое высказывание по условию должно быть истинным.

Взглянув на приведенные выше комбинации, можно сказать, что второе суждение Димы ложно, первое и третье, как мы знаем, истинные, следовательно, четвертое должно быть ложным. Из этого следует, что Гриша и Дима увлекаются химией. Тогда избранные нами комбинации приобретают адреса:

Дима: биология — химия — история.

Олег: биология — история — математика.

Гриша: биология — химия — математика.

Диму и Гришу нельзя произвольно поменять местами, так как если второе утверждение Олега будет верным, то ложным у него будет только одно высказывание, а это недопустимо по условию.

Проверив полученное нами сочетание любимых предметов у каждого из лицеистов, нетрудно прийти к выводу, что оно полностью согласуется с условиями задачи. Следовательно, принятое нами предположение о том, что третье утверждение Димы истинно, оказалось верным.

Перебирая варианты, можно убедиться, что полученный нами ответ — единственный.

3.23. Первый из отвечавших — Дима. Вторым вступил в разговор Вася. Встреча происходила во вторник.

Решение. Предположим, что первый из отвечающих действительно Вася. Значит, он в этот день говорит правду. Но если второе его утверждение тоже истинно, то беседа происходит в понедельник. А по понедельникам Вася говорит неправду. Мы пришли к противоречию. Следовательно, первого из братьев зовут Дима. Раз он сказал неправду, следовательно, беседа происходит либо во вторник, либо в четверг, либо в субботу.

Обратимся теперь к реплике второго брата (мы знаем, что его зовут Вася). Он сказал: «Завтра будет пятница». Надо ли верить этому заявлению? Вася впоследствии добавил: «Я всегда говорю правду по средам». Между тем из условия известно, что по понедельникам, вторникам и средам Вася говорит неправду. Следовательно, оба высказывания Васи ложны. Отсюда можно сделать вывод, что разговор происходит либо в понедельник, либо во вторник, либо в среду. Сопоставляя это заключение с тем, которое было сделано ранее, нетрудно прийти к выводу, что единственный день, в который мог происходить странный разговор, — вторник.

3.24. $a_1 = 35$; $a_2 = 46$; $a_3 = 75$. **Указание.** Свойство 4) совместно с любым из трех остальных, а свойства 2) и 3) совместны лишь со свойством 4).

3.25. Подойдет любой вопрос, на который путешественник заранее знает верный ответ. Например: «Как называется этот остров?»

3.26. «Если бы я вас спросил, ведет ли эта дорога в деревню, вы бы сказали «да»?». В этом случае туземец вынужден сказать правду, если он даже лжец.

3.27. K и M — лжецы.

3.28. P — правдолюбец.

Указание. Сначала доказываем, что K является лжецом. Затем рассмотрим две возможности. Пусть M — правдолюбец; так как его утверждение истинно, то и P — правдолюбец. Пусть M — лжец, так как утверждение K ложно, то P — правдолюбец.

3.29. **Решение.** Пусть K говорит правду. Тогда M является правдолюбцем. Поскольку его утверждение истинно, то K может быть только хитрецом.

Пусть K лжет. В этом случае M — не правдолюбец. Но M говорит правду, так как K лжет. Следовательно, M — хитрец.

3.30. **Решение.** Корреспондент должен задать, например, ученому A такой первый вопрос: «Имеется ли среди C и K хитрец?» Тот же самый вопрос ему нужно задать и B .

Если A и B ответят «да», то среди C и K действительно имеется хитрец, а значит, A и B — правдолюбцы. Тогда, например, можно задать A прямолинейный вопрос: «Является ли C хитрецом?»

Если A и B отвечают «нет», то среди C и K нет хитреца, а следовательно, хитрецом может быть только или A , или B . Нужно задать C вопрос: «Является ли A хитрецом?»

Наконец, если A и B дадут разные ответы, то один из них является хитрецом. Следует задать C тот же вопрос, что и в предыдущем случае.

3.31. У к а з а н и е. За два вопроса путешественник должен выяснить, с кем разговаривает (см. решение задачи 3.25), и еще за два — в какой деревне находится. Последние два вопроса (или даже один, если островитянин оказался правдолюбцем) зависят от того, кем оказался островитянин.

3.32. Первый и второй из островитян — правдолюбцы, остальные — лжецы.

Р е ш е н и е. Начнем с четвертого из островитян. Допустим, что он — правдолюбец. Тогда его высказывание истинно, а значит, первый тоже является правдолюбцем. Но их утверждения противоречат друг другу. Полученное противоречие означает, что четвертый человек является лжецом, а следовательно, первый — правдолюбцем.

Перейдем к третьему из островитян. Если его высказывание истинно, то, с одной стороны, он — правдолюбец, а с другой — лжец, так как один правдолюбец среди четверых уже есть. Значит, третий островитянин может быть только лжецом. Тогда второй является правдолюбцем.

3.33. Все 12 человек — лжецы или среди них 8 правдолюбцев, 4 лжеца.

Р е ш е н и е. Допустим, что все 12 человек — лжецы. Это соответствует условиям задачи.

Пусть теперь среди них имеются правдолюбцы. Так как утверждение правдолюбца истинно, то для того, чтобы с одной стороны от него стоял правдолюбец, а с другой — лжец, правдолюбцы должны стоять по двое. Так как утверждение лжеца ложно, то лжецы могут стоять только по одному. Обозначая правдолюбца буквой *П*, а лжеца — буквой *Л*, получим последовательность *П П Л П П Л П П Л П Л*.

3.34. 5.

3.35. Крайняя слева от Простака статуя — бог правды, крайняя справа — бог дипломатии, а в середине — бог лжи.

Р е ш е н и е. Предположим, что крайняя слева — не статуя бога правды. Тогда статуя бога правды либо находится в центре, либо крайняя справа. Но это противоречит ответам статуй, стоящим в центре и справа. Следовательно, статуя бога правды может стоять только крайней слева. При этом, по заявлению статуи бога правды, в центре стоит статуя бога лжи, и, следовательно, крайней справа — статуя бога дипломатии.

3.36. А — из Правдина, **Б, Д, Г** — из Лгунова, матч происходил в Правдине, выиграла команда Правдина.

Р е ш е н и е. 1) Из заявления *В* следует, что выиграла команда Правдина. Докажем это. Если *В* из Правдина, то сказанное им — правда, и выиграла команда Правдина. Если *В* из Лгунова, то сказанное им — неправда, и выиграла опять-таки команда Правдина.

2) Из заявления *В* следует, что *Б* из Лгунова, так как его заявление заведомо неверно. Докажем это. Нами уже доказано, что выиграла команда Правдина. Если *Г* из Правдина, то он не мог сказать, что их команда проиграла, так как это была бы ложь. Если *Г* из Лгунова, то он тоже не мог этого сказать, так как это была бы правда.

3) Из заявления G следует, что A из Правдина. Докажем это. Если G из Правдина, то A действительно с ним из одного города, т. е. из Правдина. Если G из Лгунова, то A с ним не из одного города, т. е. A снова из Правдина.

4) Теперь легко ответить на все вопросы. Из последнего заявления A следует, что дело происходит в Правдине; B и G из Лгунова.

3.37. Косоглаз, Борода и Алошек — лгуновцы, Курнос — чередовец, Длинноух — правдовец.

У к а з а н и е. Из полученных ответов можно сделать верные выводы, если рассмотреть последовательно все возможные варианты принадлежности к определенным деревням Бороды и Косоглаза:

- а) Борода — лгуновец, Косоглаз — лгуновец,
- б) Борода — лгуновец, Косоглаз — правдовец,
- в) Борода — лгуновец, Косоглаз — чередовец... и т. д.

3.38. Предположим, Фили говорит правду. Тогда, согласно его словам, три остальных гнома — вруны. И, тем самым, фраза Балина является правдой. Значит, данное предположение приводит к противоречию, поэтому Фили — врун, и его утверждение, что Кили — врун, является ложным. Отсюда заключаем, что Кили говорит правду. Тем самым, Баллин — врун, а Двалин говорит правду. Отметим, что фраза Фили «Да оба они вруны» (относительно Балина и Двалина) является ложной (несмотря на то, что Балин действительно врун), поскольку Двалин — не врун.

Глава 4. ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ

4.1. 11 участников, 7,5 очка.

4.2. Выиграл у занявшего пятое место, проиграл занявшему третье место.

4.3. Пусть первый шахматист выиграл у второго 3 партии, второй у первого — 2; первый выиграл у третьего 3 партии, проиграл третьему — 5; второй выиграл у третьего 1 партию; остальные партии окончились вничью. Тогда:

- первый шахматист выиграл 6 партий, проиграл 7, сыграл вничью 3;
- второй выиграл 3 партии, проиграл 3, сыграл вничью 10;
- третий выиграл 5, проиграл 4, сыграл вничью 7.

Получилось, что первый шахматист выиграл больше всех партий — 6, а второй проиграл меньше всех партий — 3. Но первый из друзей набрал 7,5 очков, второй — 8, а третий — 8,5.

4.4. Шахматист, занявший второе место, мог набрать не более шести очков. Шахматисты, занявшие четыре последних места, вместе набрали не менее шести очков (играя только между собой, они в сумме набирают шесть очков). Следовательно, шахматист, занявший второе место, набрал шесть очков, а шахматисты, занявшие последние четыре места, не выиграли ни одного очка у шахматистов, занявших более высокие места. Значит, шахматист, занявший третье место, выиграл у шахматиста, занявшего седьмое место.

4.5. Описанная ситуация могла произойти, например, в следующем случае. Турнир проходил в 8 туров. Амперян победил Корнеева один раз, а Привалова — два раза; Корнеев победил Привалова четыре раза, а Амперяна — ни разу; Привалов победил Амперяна два раза, а Корнеева — три раза. Остальные встречи закончились вничью. Таким образом Амперян одержал три победы и получил 8,5 очков, Корнеев — четыре победы и 8 очков, Привалов — пять побед и 7,5 очков.

4.6. Р е ш е н и е. 1) Всего в турнире было сыграно $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ партий: следовательно все участники его вместе набрали 15 очков.

Баранчук сделал только одну ничью; значит, число набранных им очков — дробное и меньше 4. Если допустить, что Баранчук набрал не 3,5 очка, то самое большее он мог набрать 2,5 очка. Но тогда Володин и Горбачев максимально набрали бы по 2 очка, Давыдов — 1,5 очка и Ершов — 1 очко, а всего общее число очков было бы $4 + 2,5 + 2 + 2 + 1,5 + 1 = 13$ вместо 15.

Следовательно, Баранчук набрал 3,5 очка.

У Володина и Горбачева, набравших меньше 3,5 очков, не могло быть по 3 очка. Действительно, Ершов, выигравший у Горбачева, набрал самое меньшее 1 очко, а Давыдов — 1,5 очка, и окажется, что все игроки вместе набрали $4 + 3,5 + 3 + 3 + 1,5 + 1 = 16$ очков вместо 15. Следовательно, Володин и Горбачев набрали по 2,5 очка или по 2 очка. Если допустить, что Володин и Горбачев набрали по 2 очка, то Давыдов максимально набрал бы 1,5 очка, а Ершов — 1 очко, т. е. все игроки вместе набрали $4 + 3,5 + 2 + 2 + 1,5 + 1 = 14$ очков вместо 15. Следовательно, Володин и Горбачев набрали по 2,5 очка.

На долю Давыдова и Ершова вместе остается 2,5 очка. Так как Ершов выиграл у Горбачева, то единственно возможно, что Давыдов набрал 1,5 очка, а Ершов — 1 очко.

На данном этапе решения таблица имеет следующий вид (табл. 3).

2) По условию ничейных партий было пять. Следовательно, в 10 клетках таблицы значится по 0,5 очка. Давыдов, выигравший одну партию и набравший 1,5 очка, сыграл вничью, как и Баранчук, только одну партию, а у Ершо-

Таблица 3

Игрок	А	Б	В	Г	Д	Е	Очки	Место
Алексеев	⊙					1	4	I
Баранчук		⊙				1	3,5	II
Володин			⊙			1	2,5	III—V
Горбачев				⊙		0	2,5	III—V
Давыдов					⊙	1	1,5	V
Ершов	0	0	0	1	0	⊙	1	VI

ва ничьих быть не могло. Значит, в клетках Алексеева, Володина и Горбачева стоит восемь «половинок». Алексеев в пяти партиях набрал 4 очка. Это могло произойти только в двух случаях: или он выиграл четыре партии, а одну проиграл, или же он выиграл три партии, а две партии сыграл вничью. Первое предположение надо отвергнуть, так как тогда все восемь «половинок» будут стоять в клетках Володина и Горбачева и окажется, что Володин набрал 3 очка, а Горбачев — 2 очка. Следовательно, Алексеев три партии выиграл и две свел вничью, а Володин и Горбачев сделали по три ничьих. Горбачев, проигравший Ершову, не мог иметь других проигрышей, так как тогда у него было бы всего 1,5 очка, а не 2,5. Но Алексеев не проиграл ни одной партии. Значит, Алексеев и Горбачев сыграли вничью.

Если бы вторая ничья Алексеева была бы в партии с Баранчуком, то у Володина был бы проигрыш Алексееву, выигрыш у Ершова и три ничьих, в том числе и в партии с Баранчуком. Оказалось бы, что Баранчук сделал две ничьих, что противоречит условию задачи. Следовательно, Алексеев выиграл у Баранчука.

Баранчук не мог иметь второго проигрыша (иначе у него максимально было бы 3 очка); но Горбачев, как уже было установлено, не имел проигрышей, кроме как Ершову. Следовательно, Баранчук и Горбачев сыграли вничью, а у Володина и Давыдова Баранчук выиграл.

Теперь таблица имеет вид (табл. 4).

У Володина, как уже было установлено, три партии были ничейными, т. е. он сыграл вничью с Алексеевым, Горбачевым и Давыдовым. Давыдов же, уже набравший свои 1,5 очка, оставшиеся две партии — Алексееву и Горбачеву — должен был проиграть. Таким образом, таблица восстановлена полностью.

4.7. Р е ш е н и е. Всего в турнире разыгрывалось 10 очков. У *А* не более трех очков (у него есть один проигрыш), но не может быть и меньше трех очков, иначе должно быть у *А* — 2,5, у *Б* — 2, у *В* — 1,5, у *Г* — 1, у *Д* — 0,5 и их сумма 7,5, а этого быть не может, так как всего разыграли 10 очков.

Из доказанного следует, что у *Б* — 2,5, у *В* — 2, у *Г* — 1,5, у *Д* — 1, а сумма всех очков $3 + 2,5 + 2 + 1,5 + 1 = 10$.

Таблица 4

Игрок	<i>А</i>	<i>Б</i>	<i>В</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>	<i>Е</i>	Очки	Место
Алексеев	⊙	1		0,5		1	4	I
Баранчук	0	⊙	1	0,5	1	1	3,5	II
Володин		0	⊙			1	2,5	III—IV
Горбачев	0,5	0,5		⊙		0	2,5	III—IV
Давыдов		0			⊙	1	1,5	V
Ершов	0	0	0	1	0	⊙	1	VI

Так как из четырех возможных очков *А* имеет три, то все три партии он выиграл. Но *Б* не проиграл ни одной партии, значит, *А* выиграл у *В*, *Г* и *Д*, а проиграл *Б*.

Б не проиграл ни одной партии и одну выиграл. Следовательно, в трех остальных партиях он набрал 1,5 очка (всего у него 2,5 очка). Это возможно, если все эти партии он сыграл вничью.

В данном положении возможны два варианта.

1) *В* должен набрать 1,5 очка в двух партиях. Если он выиграл у *Г* и сыграл вничью с *Д*, то *Г* должен выиграть у *Д*, чтобы набрать в итоге 2 очка. Это соответствует распределению очков.

2) Если *В* выиграл у *Д* и сыграл вничью с *Г*, то *Г* должен сыграть с *Д* вничью. Этот вариант отпадает, так как тогда *Г* все партии сыграл вничью, чтобы набрать 1,5 очка, а это противоречит заявлению *Д*.

Следовательно, имеем только первый вариант.

4.8. В турнирной таблице (табл. 5).

4.9. В турнирной таблице (табл. 7). Р е ш е н и е. Данные из условий задачи занесем в турнирную таблицу (табл. 6).

Так как всего в турнире разыгрывалось 12 очков, то команда «Спартак» набрала 3 очка. Кроме того, ясно, что команда «Шахтер» не выиграла ни одного матча и только один матч сыграла вничью; команда «Труд» выиграла один матч и один свела вничью; а команда «Динамо» выиграла два матча и один свела вничью.

Таблица 5

Команда	<i>А</i>	<i>Б</i>	<i>В</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>	<i>Е</i>	Очки
<i>А</i>	⊗	0	2	2	2	2	8
<i>Б</i>	2	⊗	0	2	1	2	7
<i>В</i>	0	2	⊗	0	2	2	6
<i>Г</i>	0	0	2	⊗	0	2	4
<i>Д</i>	0	1	0	2	⊗	0	3
<i>Е</i>	0	0	0	0	2	⊗	2

Таблица 6

Команда	<i>Д</i>	<i>С</i>	<i>Т</i>	<i>Ш</i>	Очки	Мячи
«Динамо»	⊗				5	
«Спартак»		⊗				
«Труд»			⊗	2 : 1	3	5 :
«Шахтер»			1 : 2	⊗	1	

Таблица 7

Команда	Д	С	Т	Ш	Очки	Мячи
«Динамо»	⊗	0 : 0	1 : 0	1 : 0	5	2 : 0
«Спартак»	0 : 0	⊗	3 : 3	0 : 0	3	3 : 3
«Труд»	0 : 1	3 : 3	⊗	2 : 1	3	5 : 5
«Шахтер»	0 : 1	0 : 0	1 : 2	⊗	1	1 : 3

Покажем, что команда «Спартак» все три матча сыграла вничью. Действительно, если бы команда «Спартак» один матч выиграла, а один свела вничью, то она должна была бы забить хотя бы один гол. Не менее двух голов для двух побед должна забить команда «Динамо». В матче «Труд» — «Шахтер» забито три гола. Но известно, что «Труд» забил всего пять голов. Следовательно, три гола команда «Труд» забила в матчах с командами «Динамо» или «Спартак», проиграв один матч, а другой сведя вничью. При этом ей также забили не менее трех голов. Таким образом, если бы команда «Спартак» один матч выиграла, то в турнире было бы забито 12 мячей, что противоречит условию задачи. Следовательно, команда «Спартак» все матчи сыграла вничью. При этом команда «Динамо» выиграла матчи у команд «Труд» и «Шахтер».

Установим теперь соотношение забитых и пропущенных мячей в каждом матче. Очевидно, что команда «Динамо» выиграла матчи с командами «Труд» и «Шахтер» со счетом 1 : 0, а команда «Спартак» матчи с командами «Динамо» и «Шахтер» сыграла вничью со счетом 0 : 0. В противном случае количество забитых в турнире мячей было бы больше одиннадцати.

И наконец, матч «Спартак» — «Труд» окончился со счетом 3 : 3. Получаем таблицу 7.

4.10. «Юг» и «Запад» сыграли между собой вничью.

4.11. На первом месте — команда «Авангард», набравшая 5 очков, на втором — три команды: «Спартак», «Торпедо» и «Динамо», набравшие по 4 очка, а на последнем — «Буревестник», набравший всего 3 очка.

Решение. Установим сначала для каждого тура команды, игравшие в нем и свободные от игры.

В первом туре встречались команды «Буревестник» — «Спартак» (по условию задачи) и «Торпедо» — «Авангард» (поскольку каждая из этих двух команд была свободна от игры соответственно в третьем и четвертом турах). Следовательно, в первом туре свободной от игры была команда «Динамо».

Во втором туре играли пары «Буревестник» — «Авангард» (по условию задачи), «Торпедо» — «Динамо» (во втором туре команды «Торпедо» и «Динамо» не могли быть свободны от игры). Следовательно, во втором туре свободной от игры была команда «Спартак».

В третьем туре команда «Торпедо», по условию задачи, была свободна от игры. Следовательно, должны были играть команды «Буревестник», «Динамо», «Авангард» и «Спартак». Но команда «Буревестник» в первом и втором

турах уже играла с командами «Спартак» и «Авангард». Следовательно, в третьем туре встречались «Буревестник» — «Динамо», «Авангард» — «Спартак».

В четвертом туре свободной от игры была команда «Авангард». Аналогично рассуждениям, проведенным для игр третьего тура, устанавливается, что в четвертом играли команды «Буревестник» — «Торпедо», «Динамо» — «Спартак».

И наконец, в пятом туре играли команды «Авангард» — «Динамо» и «Торпедо» — «Спартак», а свободной от игры была команда «Буревестник».

Ничейные результаты встреч в четвертом и пятом турах прямо указаны в условии задачи. Также указано, что в первом туре «Спартак» выиграл у «Буревестника», а во втором туре «Буревестник» выиграл у «Авангарда».

Так как по условию задачи после трех туров команда «Авангард» имела две победы в трех сыгранных матчах, проиграв «Буревестнику» во втором туре, то в первом туре она выиграла у «Торпедо», а в третьем туре — у «Спартака».

Команда «Торпедо» после двух туров имела одно поражение (от «Авангарда») и одну победу. Следовательно, она выиграла во втором туре у команды «Динамо».

Динамоцы после третьего тура, по условию задачи, выиграли только один матч. Но в первом туре команда «Динамо» была свободна от игры, во втором туре проиграла команде «Торпедо», следовательно, она выиграла в третьем туре у «Буревестника».

4.12. Р е ш е н и е. Записывать результаты матчей будем в таблицу (табл. 8), в которой учитывается, что каждая пара команд играла дважды.

Из условий задачи ясно, что «Метеор» в четырех играх набрал шесть очков из восьми, и при этом известно, что один матч с «Ракетой» сыгран вничью. Но тогда можно утверждать, что команда «Метеор» выиграла два матча из шести (один у команды «Ракета» и один у команды «Комета») и два матча свела вничью (с командой «Ракета» и с командой «Комета»).

Команда «Комета», имея пять очков, очевидно, выиграла два матча у команды «Ракета» и свела вничью один матч с командой «Метеор».

Команда «Ракета» имеет одно очко. Следовательно, у нее единственная ничья с командой «Метеор» со счетом 1 : 1, остальные матчи она проиграла с «сухим» счетом.

Установим соотношение забитых и пропущенных мячей командами в каждом матче. Так как в четырех матчах команды «Ракета» с командами «Метеор» и «Комета» ей в ворота забито тринадцать мячей из четырнадцати мячей, забитых командами «Метеор» и «Комета» во всех матчах, то в играх между командами «Метеор» и «Комета» забит только один мяч. Последнее об-

Таблица 8

Команда	«Метеор»	«Комета»	«Ракета»	Очки	Мячи
«Метеор»	⊗ ⊗		1 : 1	6	9 : 1
«Комета»		⊗ ⊗		5	5 : 1
«Ракета»	1 : 1		⊗ ⊗	1	1 : 13

стоятельство означает, что этот мяч забит в матче между командами «Метеор» и «Комета», в котором победила команда «Метеор», и, следовательно, счет в этом матче 1 : 0. Но тогда второй матч между командами «Метеор» и «Комета» окончился вничью со счетом 0 : 0.

Во втором матче между командами «Метеор» и «Ракета» (первый окончился вничью со счетом 1 : 1) «Метеор» победил с «сухим» счетом, используя все оставшиеся у него мячи. Значит, счет в этом матче был 7 : 0.

И наконец, в двух матчах команды «Комета» с командой «Ракета» командой «Комета» одержаны победы с «сухим» счетом, и в обоих матчах в сумме забито пять мячей. Но по условию задачи два матча турнира завершились с одинаковым счетом. Это возможно, если один из матчей команд «Комета» и «Ракета» закончился со счетом 1 : 0. Следовательно, второй матч между этими командами окончился со счетом 4 : 0. В результате турнирная таблица будет иметь вид таблицы 9.

4.13. Р е ш е н и е. Так как команда «Старт» набрала 6 очков в трех играх, то она одержала победы во всех трех матчах.

Так как остальные матчи окончились со счетом 2 : 0, 1 : 1, 2 : 2, 3 : 1, 5 : 3, то в шести матчах победой окончились четыре матча (три победы одержала команда «Старт» и одну — команда «Комета»).

Очевидно, победы команды «Старт» были со счетом 2 : 0, 3 : 1, 5 : 3. Значит, соотношение забитых и пропущенных мячей у команды «Старт» 10 : 4. Вничью закончились два матча в играх трех команд «Комета», «Ракета» и «Вымпел».

Установим количество очков, набранных в этих играх этими тремя командами. Всего разыгрывалось 12 очков. Команда «Старт» набрала 6 из этих 12 очков. Еще 2 очка у команды «Комета» в матче с «Вымпелом». Значит, нужно выяснить, как распределились оставшиеся 4 очка в двух играх, которые окончились вничью. При этом команда «Вымпел» сыграла один матч с командой «Ракета» (один матч она проиграла «Старту» и один матч проиграла «Комете»). Значит, команда «Вымпел» набрала всего 1 очко. По тем же причинам команда «Комета» в последнем ничейном матче набрала 1 очко, а всего в турнире она набрала 3 очка. И очевидно, команда «Ракета» набрала в турнире 2 очка. Команда «Ракета» в двух матчах сыграла вничью (ничейные результаты были только в двух матчах). При этом она пропустила в свои ворота три мяча. Значит, в матче с командой «Старт» команда «Ракета» пропустила пять мячей, и результат этого матча 5 : 3.

Таблица 9

Команда	«Метеор»		«Комета»		«Ракета»		Очки	Мячи
«Метеор»	⊗ ⊗		0 : 0	0 : 1	1 : 1	7 : 0	6	9 : 1
«Комета»	0 : 0	0 : 1	⊗ ⊗		1 : 0	4 : 0	5	5 : 1
«Ракета»	1 : 1	0 : 7	0 : 1	0 : 4	⊗ ⊗		1	1 : 13

Команда «Старт» сыграла с командой «Комета» со счетом 2 : 0. Действительно, если бы команда «Старт» сыграла с командой «Комета» со счетом 3 : 1 (это два возможных результата игры, указанных в условии задачи), то число забитых «Кометой» во всех играх мячей было бы больше двух (один мяч был бы забит «Старту», один — «Вымпелу» и не менее одного в ничейном матче с командой «Ракета»), а это противоречит условию задачи.

Теперь ясно, что матч между командами «Старт» и «Вымпел» окончился со счетом 3 : 1.

Так как в матчах с командами «Старт» и «Вымпел» команда «Комета» забила всего один мяч, а общее число забитых ею мячей два, то ее матч с командой «Ракета» закончился со счетом 1 : 1, а матч между командами «Ракета» и «Вымпел» закончился со счетом 2 : 2.

Теперь легко устанавливаются соотношения забитых и пропущенных мячей в турнире для каждой команды:

- 1) Команда «Старт» 10 : 4.
- 2) Команда «Комета» 2 : 3.
- 3) Команда «Ракета» 6 : 8.
- 4) Команда «Вымпел» 3 : 6.

В результате турнирная таблица примет вид таблицы 10.

4.14. Р е ш е н и е. Число команд, участвующих в футбольном турнире, должно быть нечетным, т. е. $2n - 1$. В противном случае в каждом турнире участвуют все команды (свободных от игры команд нет), и, значит, либо все команды одновременно проводят четное число встреч, либо все команды одновременно проводят нечетное число встреч.

Пусть после k -го тура четное число встреч провели семь команд. Тогда после k -го тура нечетное число встреч провели $2n - 8$ команд (т. е. четное число команд).

По условию задачи в $(k + 1)$ -м туре четное число встреч также провели семь команд. При каких обстоятельствах это могло быть? Рассмотрим возможные случаи.

1) Если бы в $(k + 1)$ -м туре у шести команд из семи, которые в k -м туре имели четное число встреч, было теперь нечетное число встреч, а одна из семи команд, которые в k -м туре имели четное число встреч, была свободной от игры в $(k + 1)$ -м туре, то $2n - 8$ команд, которые после k -го тура имели нечетное число встреч, после $(k + 1)$ -го тура будут иметь четное число встреч. Таким обра-

Таблица 10

Команда	С	К	Р	В	Победы	Ничьи	Мячи	Очки
«Старт»	⊗	2 : 0	5 : 3	3 : 1	3	0	10 : 0	6
«Комета»	0 : 2	⊗	1 : 1	1 : 0	1	1	2 : 3	3
«Ракета»	3 : 5	1 : 1	⊗	2 : 2	0	2	6 : 8	2
«Вымпел»	1 : 3	0 : 1	2 : 2	⊗	0	1	3 : 6	1

зом, после $(k + 1)$ -го тура четное число встреч будут иметь $(2n - 8) + 1 - 2n - 7$ команд. При этом по условию задачи $2n - 7 = 7$, и, следовательно, $n = 7$, а общее число команд, участвующих в турнире, 13.

2) Пусть в $(k + 1)$ -м туре играли все семь команд, которые после k -го тура имели четное число встреч. Тогда после $(k + 1)$ -го тура они будут иметь нечетное число встреч. Кроме того, нечетное число встреч после $(k + 1)$ -го тура будет иметь еще одна команда из числа $2n - 8$ команд, которые после k -го тура имели нечетное число встреч (она в $(k + 1)$ -м туре была свободна от игры). При этом $(2n - 8) - 1$ команда из числа тех, которые после k -го тура имели нечетное число встреч, после $(k + 1)$ -го тура будут иметь четное число встреч, и по условию задачи $2n - 8 - 1 = 7$. Значит, здесь $n = 8$, а число команд, участвующих в турнире, 15.

Оба случая возможны.

4.15. Р е ш е н и е. Команда 6 «В» класса, занявшая первое место, набрала 5 очков. Действительно, из двенадцати очков, которые разыгрывались в турнире, 4 очка набрали в сумме команды 6 «Г» и 6 «Б» классов. Следовательно, команды 6 «А» и 6 «В» классов в сумме набрали 8 очков. Команда 6 «В» класса не могла набрать меньше пяти очков, так как в противном случае (при четырех очках) она делила бы первое место с командой 6 «А» класса. Но команда 6 «В» класса не набрала 6 очков, так как для этого нужно было иметь три победы, а общий счет 3 : 1 в таблице указывает на то, что она могла одержать не более двух побед.

Из сказанного следует, что команда 6 «В» класса одержала две победы и один матч свела вничью. Будем заполнять турнирную таблицу.

Количество очков распределяется между командами так:

6 «А» — 3; 6 «Б» — 1; 6 «В» — 5; 6 «Г» — 3.

Ясно, что команда 6 «Б» занимает четвертое место, а второе и третье места нужно распределить между командами 6 «А» и 6 «Г» в зависимости от соотношения забитых и пропущенных мячей.

Так как команды 6 «А» и 6 «Б» сыграли вничью (см. табл. 4.12), то в первом столбце второй строки нужно указать этот же счет.

Установим результаты игры 6 «В» со всеми командами. Так как в матче с командой 6 «Г» команда 6 «В» забила один гол, то в этом матче был ничейный счет 1 : 1 (2 гола нужны команде 6 «В» для двух побед в остальных матчах). Значит, счет 1 : 1 ставится на пересечении четвертой строки третьего столбца и третьей строки четвертого столбца. Теперь ясно, что команда 6 «В» победила команды 6 «А» и 6 «Б» со счетом 1 : 0 в каждом матче, и этот счет нужно указать в соответствующих клетках таблицы, а также указать счет 0 : 1 напротив строк 6 «А» и 6 «Б» и столбца 6 «В».

Теперь очевидно, что команда 6 «А» в матче с командой 6 «Г» пропустила один мяч, а команда 6 «Г» забила один мяч. Следовательно, команда 6 «Г» проиграла со счетом 1 : 5, а команда 6 «А» выиграла со счетом 5 : 1 и имеет общий счет 6 : 3.

Осталось установить счет и матче команд 6 «Б» и 6 «Г».

Так как в играх с командами 6 «А» и 6 «В» команда 6 «Б» пропустила в сумме 2 мяча, то в игре с командой 6 «Г» она пропустила также 2 мяча.

Команда 6 «Г» в играх с командами 6 «А» и 6 «В» пропустила 6 мячей. Значит, в матче с командой 6 «Б» она пропустила один мяч.

Из сказанного следует, что в игре между командами 6 «Б» и 6 «Г» счет был 1 : 2 и общий счет команды 6 «Б» был 2 : 4, а команды 6 «Г» был 4 : 7.

Из общего счета команд 6 «А» и 6 «Г» заключаем, что второе место заняла команда 6 «А».

Итоговая таблица имеет вид таблицы 11.

4.16. Р е ш е н и е. Восстановим сначала изображенную таблицу. Так как число забитых мячей должно равняться числу пропущенных мячей (которых 18), то соотношение забитых и пропущенных мячей у команды «Алмаз» 1 : 3. Всего в финале разыгрывалось 20 очков. Установим, как они распределены между командами.

У команды «Динамо» не более 7 очков (есть одна ничья), а у команды «Спартак» не менее 6 очков (есть три выигрыша).

У команды «Алмаз» не менее 2 очков (есть один выигрыш). Если бы у «Алмаза» было 3 очка, то по распределению мест у команд «Зенит» и «Торпедо» также было бы не менее чем по 3 очка, и суммарное количество очков в итоге всех игр превысило бы 20 очков. Следовательно, у «Алмаза» 2 очка.

У команды «Зенит» не может быть больше 2 очков, так как в противном случае у «Торпедо» было бы не менее 4 очков (у команды «Торпедо» хуже соотношение забитых и пропущенных мячей, чем у «Зенита», она в таблице впереди «Зенита»). При этом сумма очков в турнире опять превысила бы 20 очков. Следовательно, у команды «Зенит» 2 очка, у команды «Торпедо» 3 очка. Но тогда на долю команд «Динамо» и «Спартак» остается 13 очков, и их естественное распределение таково: «Динамо» — 7 очков, «Спартак» — 6 очков.

При таком распределении очков, очевидно, «Спартак» имеет три выигрыша и один проигрыш. Ясно, что этот проигрыш команде «Динамо». Команда «Алмаз» имеет один выигрыш и только 2 очка. Значит, остальные матчи она проиграла.

Команда «Зенит» имеет 2 очка, а число забитых ею мячей превышает число пропущенных мячей. Значит, один матч она выиграла, а остальные проиграла.

Таблица 11

Класс	6 «А»	6 «Б»	6 «В»	6 «Г»	Очки	Мячи	Место
6 «А»	⊗	1 : 1	0 : 1	5 : 1	3	6 : 3	II
6 «Б»	1 : 1	⊗	0 : 1	1 : 2	1	2 : 4	IV
6 «В»	1 : 0	1 : 0	⊗	1 : 1	5	3 : 1	I
6 «Г»	1 : 5	2 : 1	1 : 1	⊗	3	4 : 7	III

рала. По рассмотренным результатам команда «Торпедо» проиграла матч «Спартак», а с командой «Динамо» имеет ничью. При этом один матч команда «Торпедо» выиграла (у нее 3 очка, а ничьих у других команд больше нет) и два проиграла. Итак, мы установили для всех команд число выигрышей, число ничьих, число проигрышей, число очков и соотношение забитых и пропущенных мячей.

Установим теперь результаты каждой из игр между командами. Как указывалось, команда «Динамо» имеет ничью с «Торпедо» и выиграла у команд «Спартак», «Зенит» и «Алмаз».

«Спартак» проиграл «Динамо» и выиграл у команд «Торпедо», «Зенит» и «Алмаз».

Отметим, что команды «Торпедо», «Зенит» и «Алмаз» имеют по одному выигрышу. Причем команды «Торпедо» и «Алмаз» могли закончить выигранные матчи только со счетом 1 : 0.

Выясним, у какой из двух команд («Торпедо» или «Зенит») выиграла команда «Алмаз». Предположим, что она выиграла у команды «Торпедо». Как указывалось, при этом «Торпедо» был забит один гол. В матче, который команда «Торпедо» выиграла, ей не забили ни одного гола. Матч «Динамо» — «Торпедо» закончился вничью, и счет при этом мог быть только 0 : 0 (команда «Динамо» во всех матчах не пропустила ни одного гола). Таким образом, в указанных трех матчах команда «Торпедо» пропустила только один мяч из семи пропущенных во всем турнире. Следовательно, в матче «Спартак» — «Торпедо» команде «Торпедо» должны были забить шесть мячей. Это противоречит тому, что «Спартак» во всех играх забил только четыре мяча. Следовательно, команда «Алмаз» не выиграла у команды «Торпедо», а проиграла ей со счетом 0 : 1. При этом ясно, что команда «Алмаз» выиграла у команды «Зенит» со счетом 1 : 0.

Учитывая соотношение забитых и пропущенных мячей у команды «Алмаз», можно утверждать, что все проигранные ею матчи (командам «Динамо», «Спартак» и «Торпедо») она проиграла со счетом 0 : 1.

Команда «Зенит» проиграла командам «Динамо», «Спартак» и «Алмаз». При этом было пропущено 4 мяча (в игре с «Торпедо» пропущенных мячей быть не могло). Один из них забила команда «Алмаз». Значит, в играх с командами «Динамо» и «Спартак» «Зенит» пропустил 3 мяча. Так как команда «Динамо» в играх с командами «Спартак» и «Зенит» забила 6 мячей, а «Спартак» она больше четырех мячей забить не могла, то «Зениту» команда «Динамо» забила 2 мяча. «Спартак» она забила 4 мяча, «Спартак» команде «Зенит» забил один мяч. При этом «Зенит» командам «Динамо» и «Спартак» не забил ни одного ответного мяча. Значит, «Зенит» сыграл с «Торпедо» со счетом 5 : 0.

Наконец, теперь видно, что команда «Спартак» сыграла с командой «Торпедо» со счетом 2 : 0.

4.17. Своими третьими выстрелами первый набрал 10 очков, второй — 2 очка.

4.18. Решение. Так как стрелок выбил 90 очков и из них 4 раза попал в десятку, т.е. набрал 40 очков, то в другие 6 раз он набрал оставшиеся 50 очков. Известно, что стрелок попал в семерку, восьмерку и девятку хотя бы один раз и в другие круги мишени не попадал. Поэтому за три выстрела он набрал $9 + 8 + 7 = 24$ очка и за три оставшихся выстрела выбил 26 очков. Такое количество очков можно набрать из комбинаций цифр 7, 8 и 9 единственным образом: $8 + 9 + 9 = 26$.

Таким образом, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку — 2 раза, а в девятку — 3 раза.

4.19. Попадания стрелка в круги мишени дают соответственно 1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50 очков.

Решение. Обозначим через x , y и z число очков, которые получал стрелок при попадании в круги мишени, а через a , b и c число попаданий в каждый круг соответственно. Тогда по условию задачи $ax + by + cz = 96$.

Так как спортсмен произвел шесть выстрелов и попадал в некоторые отверстия более одного раза, то a , b , c могут принимать значение не менее 1, но не более 4. При этом возможны три варианта значений a , b , c :

$$1, 1, 4; 1, 2, 3; 2, 2, 2.$$

Следовательно, для решения задачи необходимо решить в положительных целых числах три уравнения:

$$x + y + 4z = 96,$$

$$x + 2y + 3z = 96,$$

$$2x + 2y + 2z = 96.$$

Легко показать, что первое уравнение не имеет решений в указанных в условии числах, второе уравнение имеет два решения: $x = 1$, $y = 10$, $z = 25$; $x = 50$, $y = 20$, $z = 2$, а третье уравнение имеет одно решение: $x = 3$, $y = 25$, $z = 20$.

4.20. Белосельский набрал 6 очков (один лещ и один окунь), Удалов — 5 очков (один судак), Ложкин — 4 очка (два окуня), Грубин — 3 очка (три ерша).

4.21. Последнее. Решение. Общая сумма баллов, полученных всеми пятью спортсменами, — 75. Ачкасов получил четыре пятерки и четверку ($5 + 5 + 5 + 5 + 4 = 24$). Поскольку у занявшего последнее место Емельянова должно быть самое меньшее 11 очков, то единственно возможные по условию суммы баллов у остальных пятиборцев определяются так:

Боровский — 15, Колоколов — 13, Дikuшин — 12, Емельянов — 11 ($5 + 3 + 1 + 1 + 1 = 11$).

Емельянов получил 5 баллов на соревнованиях по стрельбе. Поэтому единственная четверка Ачкасова была получена им на соревнованиях по стрельбе.

По условию Колоколов получил 4 одинаковых балла. Это могут быть только тройки. Тогда последний полученный балл — единица ($3 + 3 + 3 + 3 + 1 = 13$). По верховой езде на третье место вышел Емельянов. Значит, единицу Колоколов получил за верховую езду, а на стрельбах он набрал 3 балла.

Оценки Дикушина должны быть 4, 2, 2, 2, 2, поскольку пятерки, тройки и четыре единицы уже исчерпаны, а четверки по преимуществу должны быть у Боровского. Следовательно, 2 балла на стрельбах получил Дикушин.

Единица остается на долю Боровского. Таким образом, на соревнованиях по стрельбе Боровский занял последнее место.

4.22. Достаточно. Лена в первый вечер разгадала девять ребусов.

У к а з а н и е. Составьте таблицу ребусов и очков. Покажите, что в соревновании участвовали четыре девушки, и оно длилось четыре вечера. Рассмотрите все возможные по нашему условию разбиения 100 очков на четыре слагаемых.

4.23. Р е ш е н и е. 1) Николаев в начале гонки обходил спартаковца. За четыре круга до финиша гонку пытаются возглавить Виноградов с иркутянином, но за три круга до финиша Сорокин со спартаковцем резким броском уходит вперед. Значит, спартаковец не может быть ни Николаевым, ни Виноградовым, ни Сорокиным. Следовательно, спартаковец — Романов.

2) Сосед спросил: «Вы за кого болеете: за Николаева, Виноградова или армейца?» Значит, ни Николаев, ни Виноградов — не армейцы, а Романов — спартаковец. Отсюда, фамилия армейца — Сорокин.

3) Так как спартаковец стал отставать в самом начале гонки от Николаева вместе с туляком, а за два круга до финиша (когда лидировали спартаковец и Сорокин) спартаковца обгоняет хабаровец, значит, представитель общества «Спартак» мог приехать только из Иркутска или из Тюмени.

На последнем круге зенитовец обходит туляка и приходит первым, а спартаковец — третьим. Значит, этот зенитовец и есть тот хабаровец, перед этим обошедший спартаковца Романова, а туляк — армеец Сорокин.

4) Из предположения, что Виноградов и тюменец не уступят опытному динамовцу, ясно, что Виноградов не динамовец. Не может он быть ни спартаковцем (это Романов), ни армейцем, значит, Виноградов и есть победитель гонки, зенитовец из Хабаровска. На долю динамовца остается фамилия Николаев.

5) Николаев — не туляк (это Сорокин), не хабаровец (это Виноградов) и не тюменец, так как о тюменце сказано, что он не уступит динамовцу, т. е. самому Николаеву. Значит, динамовец Николаев — из Иркутска. Соответственно спартаковец Романов — тюменец.

6) Выясним, кто какие места занял в соревновании. Зенитовец Виноградов из Хабаровска, обойдя туляка, занял первое место. Армеец Сорокин из Тулы занял второе место. Третьим, по условию задачи, был спартаковец Романов из Тюмени. Четвертым пришел динамовец Николаев из Иркутска.

4.24. Р е ш е н и е. В последнем, *четвертом заезде* Росин занял первое место, Волков на Стоике третье и Гордеев на Буяне — четвертое. Значит, Новиков занял в этом заезде второе место. На долю Росина и Новикова достались лошади Алмаз и Ментор, но на Алмазе, по условию задачи, Новиков ездил в третьем заезде, значит, он занял второе место на Менторе, а Росин — первое место на Алмазе.

В *первом заезде* Стоик занял первое место, Алмаз — второе, Буян — третье, а Ментор — четвертое. Определим, кто из жокеев и на какой лошади принял участие в заезде, если известно, что Гордеев на Стоике занял первое место. Новиков в третьем заезде сидел на Алмазе, а в четвертом на Менторе, значит, Новиков принял участие в первом заезде на Буяне и занял третье место. Определим, кто из жокеев в этом заезде ехал на Алмазе и кто на Менторе. Так как на Алмазе в четвертом заезде ехал Росин, значит, на Алмазе в этом заезде мог ехать только Волков, который вышел на второе место, а на Менторе — Росин, занявший четвертое место.

Во *втором заезде* жокеи заняли места по алфавитному порядку своих фамилий: Волков — первое место, Гордеев — второе, Новиков — третье, Росин — четвертое. Определим, на каких лошадях они сидели в этом заезде: Новиков в первом заезде сидел на Буяне, в третьем — на Алмазе и в четвертом — на Менторе, значит, во втором заезде Новиков занял третье место на Стоике.

Росин в первом заезде сидел на Менторе, в четвертом — на Алмазе, значит, Росин во втором заезде занял четвертое место на Буяне.

Волков в первом заезде ехал на Алмазе, следовательно, во втором заезде он первое место занял на Менторе, а Гордеев второе место на Алмазе.

В *третьем заезде* места, занятые лошадьми, распределились следующим образом: первое место занял Алмаз, второе место Буян, третье место Ментор и четвертое — Стоик. Из жокеев, по условию задачи, первое место на Алмазе занял Новиков.

Определим, на какой лошади кто из жокеев ехал. На Буяне в первом заезде ехал Новиков, во втором — Росин и в третьем — Гордеев, значит, в этом, третьем, заезде второе место на Буяне занял Волков.

На Менторе в первом заезде ехал Росин, во втором заезде — Волков и в четвертом — Новиков, следовательно, в третьем заезде третье место на Менторе занял Гордеев. Четвертое место в этом, третьем заезде на Стоике занял Росин.

Чтобы узнать, кто из жокеев стал победителем соревнований и какая лошадь была признана лучшей, выпишем места, занятые каждым жокеем и каждой лошадью по каждому заезду.

1-й заезд:

Гордеев — Стоик (4 очка),
Волков — Алмаз (3 очка),
Новиков — Буян (2 очка),
Росин — Ментор (1 очко);

2-й заезд:

Волков — Ментор (4 очка),
Гордеев — Алмаз (3 очка),
Новиков — Стоик (2 очка),
Росин — Буян (1 очко);

3-й заезд:

Новиков — Алмаз (4 очка),
Волков — Буян (3 очка),
Гордеев — Ментор (2 очка),
Росин — Стоик (1 очко);

4-й заезд:

Росин — Алмаз (4 очка),
Новиков — Ментор (3 очка),
Волков — Стоик (2 очка),
Гордеев — Буян (1 очко).

Таким образом, Гордеев набрал 10 очков, Волков — 12 очков, Новиков — 11 очков и Росин — 7 очков. Количество очков, полученных каждой лошадью, следующее: Стоик набрал 9 очков, Алмаз — 14 очков, Буян — 7 очков и Ментор — 10 очков.

По подведенным итогам победителем соревнований оказался жокей Волков — 12 очков, а лучшей лошадью была признана лошадь по имени Алмаз — 14 очков.

4.25. Тот, кто ходит вторым, — *А*.

4.26. Выигрывает первый игрок. **Р е ш е н и е.** Пусть первый игрок называет числа a , b и c . Даже если он выберет их целыми, корни квадратного уравнения могут оказаться иррациональными или даже совсем не существовать. Как же быть?

Ему следует взять числа a , b и c так, чтобы выполнялось равенство $a + b + c = 0$: тогда квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (возможно и другое уравнение — с теми же коэффициентами, но расположенными в ином порядке) всегда имеет корень $x_1 = 1$, а также корень $x_2 = c/a$, если $a \neq 0$. Для того чтобы корни этого уравнения получились различными, нужно выбрать числа a , b и c так, чтобы они были не равными 0 и такими, чтобы отношение любых двух из них было отличным от 1.

Следовательно, первый игрок выиграет, если он назовет любые три рациональных числа a , b и c , не равных нулю, попарно различных и таких, что $a + b + c = 0$.

4.27. Если исходные числа разные, то для выигрыша начинающему достаточно своим первым ходом уравнивать числа, а далее просто повторять ходы противника. Если исходные числа равны — то при правильной игре обоих начинающий выиграть не может.

4.28. На рисунке 7 приведены все выигрывающие положения для второго игрока.

4.29. Нет. Действительно, если игра не закончилась после того, как все пятеро игроков сделали по одному ходу, то в этот момент у каждого из игроков

имеется по две шашки одинакового цвета: у двоих по две черные, а у троих по две белые — и передается черная шашка. Если она попадает к игроку, имеющему две черные шашки, то игра заканчивается. Ясно, что не более чем на девятом ходу игра заканчивается.

4.30. Начинающий должен назвать «один» и при каждом ходе противника прибавлять к его сумме число $11 - n$, где n — число, прибавленное противником.

4.31. Выигрышную стратегию имеет начинающий. Для победы он должен первым

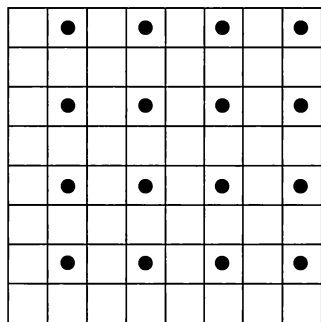


Рис. 7

назвать число 1, а далее, если противник называет число x , то первый называет число $5 - x$, и своим шестым ходом он достигает числа 26.

4.32. Решение. Опишем выигрышную стратегию первого игрока.

Из чисел ряда 1, 2, 3, ..., 19 будем образовывать пары, суммы компонент которых равны 20. Это будут пары: (1, 19), (2, 18), (3, 17), (4, 16), (5, 15), (6, 14), (7, 13), (8, 12), (9, 11). В создании этих пар, естественно, не участвует число 10.

В связи с этим выигрышная стратегия первого игрока состоит в следующем: своим первым ходом он вычеркивает число 10, а после каждого хода противника, при котором вычеркивается число, являющееся компонентой некоторой пары, первый игрок должен вычеркнуть число, которое является второй компонентой той же пары.

После соответствующего числа вычеркиваний останется пара чисел, сумма которых равна 20 и, значит, делится на 5.

4.33. Решение. Чтобы обеспечить первому игроку разность между оставшимися двумя числами равной 55 (независимо от того, как бы ни играл противник), он может воспользоваться следующей стратегией: своим первым ходом начинающий вычеркивает 9 чисел от 47 до 55. При этом остальные числа разбиваются на две группы от 1 до 46 и от 56 до 101.

Все числа этих двух групп можно разбить на пары по следующему принципу: если k — первое число пары и $k < 47$, то второй компонентой пары берется число $55 + k$, а если k — первое число пары и $k > 55$, то второй компонентой пары берется число $|55 - k|$. Например, пары: 40, 95 ($55 + 40 = 95$); 70, 15 ($|55 - 70| = 15$).

В связи с этим для любого числа k ($k < 47$), вычеркнутого вторым игроком, первый вычеркивает число $55 + k$, а для любого числа k ($k > 55$), вычеркнутого вторым игроком, первый вычеркивает число $|55 - k|$. Но тогда после одиннадцати поочередных вычеркиваний чисел, указанных в условии задачи, остается одна пара из описанных выше, и разность компонент этой пары равна 55.

4.34. Начинающий. У к а з а н и е. Если после последнего хода второго игрока получилось 8-значное число с суммой цифр вида $9k + r$ ($k = 0, 1, 2, \dots$; $0 \leq r \leq 8$), то ему следует написать в качестве последней цифры $9 - r$.

4.35. Второй игрок. Р е ш е н и е. Для второго игрока важна его последняя цифра. После последнего хода начинающего образуется 9-значное число. Разделим его на 7 с остатком; получим число вида $7q + r$, где $0 \leq r < 7$. Может ли второй игрок выбрать свою последнюю цифру a так, чтобы 10-значное число делилось на 7?

10-значное число принимает вид $(7q + r)10 + a = (70q + 7r) + (3r + a)$.

Следовательно, второй игрок должен выбрать цифру a так, чтобы число $3r + a$ делилось на 7. Переберем все возможности.

При $r = 0$ второму игроку следует взять $a = 7$; при $r = 1$ взять $a = 4$; при $r = 2$ — $a = 1$ (или 8); при $r = 3$ — $a = 5$; при $r = 4$ — $a = 2$ (или 9); при $r = 5$ — $a = 6$; при $r = 6$ — $a = 3$.

Оказалось, что при всех значениях r существует такая цифра a , что число $3r + a$ делится на 7. Поэтому выигрывает второй игрок.

4.36. Р е ш е н и е. Начинаящий должен первым ходом положить шашку в центр стола, а дальше отвечать на последний ход второго игрока ходом, симметричным относительно центра стола.

4.37. Р е ш е н и е. Допустим, что у второго игрока имеется выигрывающая стратегия. Тогда первым ходом начинающему следует поставить крестик на любое поле, а в дальнейшем применять выигрывающую стратегию второго игрока; лишний крестик ему может только помочь. Получается, что выигрывает начинающий — противоречие.

4.38. Р е ш е н и е. Рассмотрим доску форматом 3×3 .

Будем обозначать клетки доски буквой A с индексами i, j , т. е. A_{ij} , где i — номер строки на доске, а j — номер столбца на доске.

Покажем, что, играя в крестики-нолики по новым правилам, начинающий всегда выигрывает. Действительно, если он поставит своим первым ходом на клетке A_{22} крестик, то противник вынужден будет своим первым ходом поставить нолик на одну из клеток, окружающих клетку A_{22} . Возможны два случая.

1) Противник своим первым ходом ставит нолик в угловую клетку, например A_{11} . Тогда начинающий, поставив нолик на противоположную (по диагонали) клетку (рис. 8), выигрывает, так как после этого хода начинающего любой ход противника ведет его к проигрышу.

2) Противник своим первым ходом ставит нолик не на угловую клетку, например A_{21} , тогда начинающий занимает ноликом клетку A_{23} . После этого противник вынужден занять ноликом одну из двух оставшихся клеток, например A_{12} . После чего начинающий, заняв ноликом клетку A_{32} (рис. 9), обеспечивает себе выигрыш.

4.39. Второй мальчик выиграет, если он будет ставить ладьи симметрично ладьям первого мальчика относительно центра доски.

4.40. Начинаящий. У к а з а н и е. Первым ходом ему нужно соединить диагональю две противоположные вершины 30-угольника, а в дальнейшем отвечать на ход противника ходом, симметричным относительно этой диагонали.

4.41. В обоих случаях выигрывает начинающий. **Р е ш е н и е.** 1) При $n = 9$ начинающему следует первым своим ходом переправить на плюс центральный минус, а затем отвечать, на каждый ход противника ходом, симметричным относительно центра цепочки. Выигрывает начинающий. Ясно, что эта стратегия применима при любом нечетном начальном числе минусов. 2) При $n = 10$ также выигрывает начинающий: ему нужно первым ходом переправить два центральных минуса на плюсы, а дальше отвечать на ход второго игрока хо-

0		
	+	
		0

Рис. 8

	0	
0	+	0
	0	

Рис. 9

дом, симметричным относительно центра цепочки. Очевидно, такая стратегия приведет его к победе при любом четном начальном числе минусов.

4.42. 1) Первый игрок; 2) первый игрок.

4.43. Он должен на каждом ходу записывать ту же цифру, что и начинающий на том же ходу. По признаку делимости на 11 получающееся 16-значное число делится на 11.

4.44. Он должен вписать любое число вместо какой-либо звездочки во втором равенстве. Далее, если второй игрок вписывает число вместо какой-либо звездочки в первом, втором или третьем равенстве, то и начинающему следует вписать число соответственно в первом, втором или третьем равенстве (так, чтобы первое или второе равенство выполнялось).

4.45. Начинающий. Первым ходом он должен взять 4 спички, а дальше дополнять число спичек, взятых вторым игроком на последнем ходу, до шести.

4.46. Ему следует первым ходом взять один камешек, в дальнейшем дополнять число камешков, взятых вторым игроком на последнем ходу, до четырех.

4.47. Витя. Р е ш е н и е. Коля при первом ходе пишет натуральное число от 16 до 30. Вите в ответ лучше всего написать число 15. Далее Коля пишет любое натуральное число от 8 до 14, а Вите следует написать 7. Затем Коля пишет любое натуральное число от 4 до 6, а Вите нужно написать 3. Коле остается написать только число 2, Вите — 1.

4.48. У к а з а н и е. Аналогично задаче 4.54.

4.49. Р е ш е н и е. Первым ходом начинающий должен взять пять предметов, а каждым последующим ходом брать $6 - n$, где n — количество предметов, взятых противником.

4.50. Р е ш е н и е. Выигрышная стратегия начинающего состоит в следующем: своим первым ходом он должен взять одну спичку, а затем после каждого хода противника он берет столько спичек, сколько взял перед ним противник.

Если начинающий ошибся и вместо одной спички взял своим первым ходом две спички, то для выигрыша противнику следует взять своим первым ходом одну спичку, а во все последующие ходы брать столько спичек, сколько перед ним брал начинающий (поставить себя в позицию начинающего).

Пусть начинающий правильно сделал первый ход, но в один из последующих ходов ошибся и взял одну спичку (две спички), в то время как противник предыдущим ходом взял две спички (одну спичку). В этом случае для выигрыша противнику следует взять своим следующим ходом две спички (одну спичку), а во все последующие ходы брать столько же спичек, сколько перед ним взял начинающий.

4.51. Так как число 15 представимо в виде суммы $15 = 3 + 4 + 4 + 4$, то выигрышная стратегия начинающего состоит в следующем: своим первым ходом начинающий должен взять три предмета, а потом после каждого хода противника, взявшего один или три предмета, брать соответственно три или один предмет.

4.52. Так как число 22 представлено в виде суммы $22 = 4 + 6 + 6 + 6$, то выигрышная стратегия начинающего состоит в следующем: своим первым ходом начинающий должен взять четыре предмета, а потом после каждого хода противника, взявшего два или четыре предмета, брать соответственно четыре или два предмета.

4.53. Второй игрок. **Решение.** Разберем несколько случаев, начав с небольшого числа монет, лежащих на столе.

1) Пусть на столе лежат 1, 2, 3 или 4 монеты. Тогда выигрывает начинающий, взяв первым ходом все эти монеты.

2) Пусть имеется 5 монет. Здесь выигрывает второй игрок дополнением до 5: если начинающий первым своим ходом берет со стола 1, 2, 3 или 4 монеты, то второму игроку в ответ нужно взять 4, 3, 2 или 1 монету.

3) Допустим, что на столе вначале лежат 6, 7, 8 или 9 монет. Тогда выигрывает начинающий, взяв первым ходом соответственно 1, 2, 3 или 4 монеты и сведя этот случай к предыдущему, но с переменной игроков местами.

4) Если на столе лежат 10 монет, то выигрывает второй игрок, дважды доводя число монет, взятых начинающим на том же ходу, до 5.

Вообще, намечается следующая закономерность: если число монет, которые лежат вначале на столе, делится на 5, то выигрывает второй игрок, а если не делится, то начинающий. В данном случае 60 делится на 5.

4.54. Начинающий. **Решение.** Он должен первым ходом выбросить кучку из 25 спичек, а кучку из 20 спичек разбить на две, с нечетным числом спичек в каждой. Второй игрок одну из них выбрасывает, а другую разбивает на две кучки, в одной из которых четное, в другой — нечетное число спичек. Дальше все повторяется.

4.55. **Решение.** 1) Начинающий должен первый ход представить противнику, а затем брать из одной кучки столько предметов, сколько из другой берет противник. 2) Первым ходом начинающий должен взять 14 камней из первой кучки, а потом вести игру, как в первом случае.

4.56. **Решение.** Начинающий игрок проиграет, если своим очередным ходом он будет вынужден опорожнить один из ящиков. А это случится, если, когда ему надо будет делать ход, в обоих ящиках окажется по одному шарiku. Чтобы избежать этого, он должен при каждом вынимании шариков в свой ход уравнивать число шариков в обоих ящиках. Отсюда единственно возможный план выигрыша начинающим игроком такой: прежде всего он вынимает 30 шариков из ящика с 80 шариками. Если затем второй игрок вынет из какого-либо ящика n шариков, то первой сейчас же вынет столько же шариков из другого ящика и т. д. Так как число шариков все время уменьшается и после каждого очередного хода первого игрока в обоих ящиках оказывается поровну, то со временем после хода первого игрока в ящиках останется по одному шарiku, и начинающий игрок выигрывает.

4.57. Начинающий. Первым ходом ему следует взять 20 спичек из первой кучки, а дальше отвечать на ход второго игрока симметричным ходом.

4.58. Решение. Как начинающему обеспечить себе победу? Для этого он должен одну из трех пуговиц передвинуть вправо на последнюю клетку. Далее, после любого перемещения вправо одной из двух оставшихся пуговиц противником начинающий должен пуговицу перенести в ту же клетку, в которую перенес свою пуговицу противник.

Очевидно, эта стратегия обеспечивает победу начинающему.

Предположим теперь, что начинающий не знает выигрышной стратегии и своим первым ходом передвинул одну пуговицу вправо не на последнюю клетку, а на одну из предыдущих клеток. В этом случае достаточно указанную пуговицу передвинуть дальше на последнюю клетку, и он становится в позицию начинающего в выигрышной стратегии.

Пусть теперь начинающий своим первым ходом переместил одну из трех пуговиц на последнюю клетку, но в одном из последующих ходов допустил ошибку, т. е. передвинул одну из двух оставшихся пуговиц не на ту клетку, на которую перенес свою пуговицу противник. Тогда противнику нужно переместить свою пуговицу (или пуговицу начинающего) на ту же клетку, на которой стоит вторая пуговица. При этом он, очевидно, становится в выигрышную позицию начинающего.

4.59. Начинающий. Решение. Начинающему нужно первым ходом взять все 30 камешков из какой-либо одной кучки, например третьей, после чего задача сведется к примеру 4.13.

4.60. Решение. Из условий задачи видно, что для переноски одной банки из некоторого лагеря в следующий нужно взять, по крайней мере, три банки, две из которых будут съедены на пути туда и обратно. Проведя подобные рассуждения в обратном порядке, начиная с последнего перехода, в результате которого в пятый лагерь будет доставлена одна банка, приходим к выводу, что из базового лагеря нужно взять не менее $3^5 = 243$ банок.

Докажем теперь, что 243 банок хватит. Для этого из базового лагеря выходит 81 член экспедиции. 54 человека из них, принеся по банке в первый лагерь, сразу же возвращаются. Остальные 27 человек, взяв по три банки, идут во второй лагерь. 27 банок при этом остаются в первом лагере, чтобы обеспечить им возвращение из первого лагеря в базовый. Так происходит в каждом лагере. Две трети дошедших участников возвращаются, а треть — идет дальше. Таким образом, из четвертого лагеря в пятый выйдет один человек. Он и принесет вожделенную банку в пятый лагерь.

4.61. Последний из участников экспедиции проник вглубь пустыни за 10 дневных переходов.

4.62. Решение. Победителем соревнования будет тот, кто быстрее других проведет следующее рассуждение. Допустим, что на мне красный колпак. Каждый из моих соседей видит цвет его и должен думать так: «Если бы на мне был красный колпак, то третий конкурент, видя, что оба красных колпака уже использованы, должен был бы сразу после снятия повязок заявить, что на нем белый колпак. Но на самом деле оба соседа молчат. Значит, мой колпак белый».

4.64. Р е ш е н и е. Король не мог сделать меньше трех черных меток, иначе те, у кого на лбу была черная метка, видели бы больше белых меток, чем черных, и остались бы сидеть. Если бы король нанес три черные метки, то после того, как четверо встали, любой из трех юношей с черной меткой на лбу мог бы сразу же прийти к заключению, что он помечен черной краской. Ведь в противном случае общее число черных меток было бы меньше трех. Следовательно, все метки, сделанные королем, были черные. Юноша рассуждал так: «Если у меня на лбу белая метка, то мои соперники могли рассуждать так, как изложено выше, и установить цвет своей метки, но мои соперники молчат, значит, на моем лбу черная метка».

4.65. Р е ш е н и е. 1) Предположим, в вагоне был один запачкавшийся пассажир. Он видит лица остальных пассажиров — они чисты. Но запачкавшиеся в вагоне есть. Значит, рассуждает он, запачкан я. На первой же остановке он идет мыться, после чего в вагоне все чисты. Но по условию все были чисты лишь после четвертой остановки. Предположение отпадает.

2) Предположим, в вагоне было два запачкавшихся пассажира. Каждый из них рассуждал так: «Я вижу только одного запачкавшегося, и если я чист, то этот пассажир на первой же остановке должен пойти мыться» (см. рассуждение п. 1). Но вот поезд остановился, а никто мыться не идет. «Значит, — продолжает рассуждать тот же пассажир, — этот человек не был убежден, что запачкан; но это возможно лишь в случае, если он считает, что запачкан я, так как он видит, что остальные-то все чисты». На второй остановке оба запачкавшиеся пассажира пошли мыться, после чего все оказались чисты. Очевидно, это предположение также противоречит условию.

3) Предположим, в вагоне было три запачкавшихся пассажира. Каждый из них рассуждает так: «Я вижу двух запачкавшихся. И, если я чист, эти двое пойдут мыться на второй остановке» (см. рассуждение п. 2). На второй остановке никто мыться не пошел; это убедило сомневавшегося пассажира, что он тоже грязен, и на третьей остановке все три запачкавшихся пассажира пошли мыться, после чего все пассажиры были чисты. Предположение отпадает.

4) Предположим, в вагоне было четыре запачкавшихся пассажира. Каждый из них видит трех запачкавшихся и, проделав такое же рассуждение, что и в п. 3, ждет третьей остановки. Но на этой остановке никто не пошел мыться, и сомневающиеся пассажиры убедились, что они тоже грязны, и вымылись на четвертой остановке.

4.66. Цвет надетого на гнома капюшона может определить каждый из двух гномов, на которых надеты синие капюшоны. **Р е ш е н и е.** Действительно, каждый из гномов, на которых надеты синие капюшоны, видит перед собой четырех гномов, из которых трое в красных капюшонах (а красных капюшонов всего три), и поэтому сразу же приходит к выводу о том, что на нем может быть только синий капюшон.

4.67. Цвет надетого на гнома капюшона может определить каждый из пяти гномов, участвующих в игре.

Решение. Действительно, им показали три красных и четыре синих капюшона, а в темноте надели два красных и три синих капюшона.

Так как каждый из трех гномов в синих капюшонах видит перед собой два красных капюшона и знает, что всего красных три, то он может рассуждать так: «Если бы на мне был красный капюшон, то каждый из двух оставшихся в синих капюшонах гномов видел бы три красных капюшона (а их всего три) и пришел бы к выводу, что на нем синий. Но они молчат. Значит, на мне не красный, а синий капюшон».

Так как каждый из двух гномов в красных капюшонах видит перед собой один красный и три синих капюшона и знает, что всего синих четыре, то он может рассуждать так: «Если бы на мне был синий капюшон, то оставшийся гном в красном капюшоне видел бы четыре синих капюшона (а их всего четыре) и пришел бы к выводу, что на нем красный. Но он молчит, значит, на мне не синий, а красный капюшон».

4.68. Ни один из трех гномов, фигурирующих в задаче, не может определить цвет надетого на него капюшона.

4.69. Цвет своего капюшона может определить каждый из двух гномов, на которых надели капюшоны синих цветов.

Решение. Действительно, всего в игре участвует восемь гномов. На них надето четыре красных, два синих и два белых капюшона, а спрятан один красный и два синих капюшона. Каждый из двух гномов, на которых надеты синие капюшоны, может рассуждать двояко:

1) Пусть на мне капюшон красного цвета. Тогда гномы в капюшонах не красного цвета видят перед собой пять гномов в капюшонах красного цвета (а капюшонов красного цвета всего пять). Следовательно, гномов в капюшонах красного цвета можно исключить из рассмотрения и тогда передо мной остается три гнома: один в капюшоне синего цвета и два в капюшонах белого цвета. Но белых капюшонов всего два, значит, гном в синем капюшоне однозначно определяет синий цвет своего капюшона и оповещает об этом участников игры, а я узнаю, что на мне, действительно, красный капюшон.

2) На мне капюшон не красного цвета. Тогда исключаем из рассмотрения четырех гномов в красных капюшонах. Остается четыре гнома: два в белых капюшонах и два в синих капюшонах. Любой из гномов в синем капюшоне видит перед собой двух гномов в белых капюшонах. Но белых капюшонов всего два. Поэтому любой гном в синем капюшоне приходит к правильному выводу о синем цвете своего капюшона. Таким образом, цвет надетого на гнома капюшона может определить один из гномов в синем капюшоне.

4.70. 1) Выигрывает участник игры в красном колпаке. **Решение.** Действительно, он видит перед собой два белых колпака и, зная, что предъявлялось только два белых колпака, приходит к выводу о том, что на нем может быть только красный колпак.

2) Выиграть может один из двух участников игры, на которых надеты красные колпаки. **Решение.** Действительно, каждый из них видит один белый колпак и один красный и может рассуждать так: «Если бы на мне был белый

колпак, то участник игры в красном колпаке видел бы два белых колпака и пришел бы к выводу о том, что на нем красный колпак (см. первый случай задачи). Но он молчит, значит, на мне не белый, а красный колпак».

4.71. 1) Выигрывает один из участников игры в красном колпаке. **Р е ш е н и е.** Он видит перед собой три красных колпака и три белых и может рассуждать так: «Если бы на мне был белый колпак, то партнер по игре в красном колпаке видел бы перед собой четыре белых колпака (белых колпаков предъявлялось четыре) и пришел к выводу, что на нем красный колпак. Но он молчит. Значит, на мне не белый колпак, а красный».

2) Победителя в игре быть не может. **Р е ш е н и е.** Действительно, зануменуем участников игры. Для каждого из них очевидно, что любой из его партнеров видит по крайней мере пять красных колпаков. Поэтому если первый участник игры посчитает, что на нем белый колпак, и второй участник видит один белый и пять красных колпаков, то он не может предположить, что третий участник видит четыре красных и два белых колпака (подразумевая, что второй участник игры тоже предположил, что на нем белый колпак). Следовательно, цепочка логических рассуждений обрывается, не дав результата.

4.72. Победителем игры будет один из двух участников игры в белом колпаке. **Р е ш е н и е.** Действительно, участники игры в белых и синих колпаках могут исключить из рассмотрения участников игры в красных колпаках, рассуждая аналогично тому, как это делалось в решении примера 4.19. Тогда игра сводится к случаю, когда в ней пять участников, которым предъявлялось шесть белых и четыре синих колпака, а затем на них было надето два белых и три синих колпака. Любой из двух участников игры в белых колпаках может определить цвет своего колпака, рассуждая так: «Если бы на мне был синий колпак, то участник в белом колпаке видел бы перед собой четыре синих колпака (их всего четыре) и пришел бы к выводу, что на нем белый колпак. Но он молчит. Значит, на мне не синий, а белый колпак».

Аналогично можно было исключить из рассмотрения участников игры в синих колпаках. Тогда приходим к «Игре мудрецов», в которой пять участников, которым предъявлялось шесть белых и пять красных колпаков. Ясно, что победителем и в этом варианте будет один из участников в белом колпаке.

Отметим, что исключить из игры ее участников в белых колпаках здесь невозможно.

4.73. У к а з а н и е. Сначала рассмотреть случай, когда первым трем надеются белые шляпы. Постепенно число белых шляп уменьшается.

Глава 5. ВЫДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА ИЛИ ПОДМНОЖЕСТВА

5.1. Положим на одну чашку весов, например, первую и вторую монеты, а на другую — две остальные и после первого взвешивания выделим ту чашку весов, которая оказалась более тяжелой; затем понадобится еще одно взвешивание. Найти фальшивую монету за одно взвешивание в общем случае нельзя.

5.2. 1) 3; 2) 4.

5.3. 2.

5.4. 1) 3; 2) 3; 3) 4.

5.5. 3 взвешивания. Р е ш е н и е. Обозначим кубы соответственно буквами $A, B, B, Г, Д, E$. При первом взвешивании сравним, например, массы кубов A и B , а при втором — A и B . Если оба раза весы были в равновесии, то кубы A, B и B имеют одинаковую массу и взвешивания закончены. Если оба раза весы были в неравновесии, то кубы B и B имеют одинаковую массу, а куб A — иную; причем из результатов этих взвешиваний видно, легче или тяжелее A , чем каждый из кубов B и B ; затем достаточно одного взвешивания, скажем, кубов $Г$ и $Д$. Если один раз весы были в равновесии, а другой — в неравновесии, то отсюда также видно, какие два куба из тройки A, B и B имеют одинаковую массу; после этого достаточно также еще одного взвешивания.

5.6. Р е ш е н и е. Положим на одну чашку весов эталон и первую из пяти деталей, на другую — вторую и третью. Если весы оказались в равновесии, то бракованной деталью является одна из двух оставшихся — четвертая или пятая; при втором взвешивании сравним массы эталона и, например, четвертой детали. Если же при первом взвешивании весы были в неравновесии и более легкой оказалась та чашка, на которой лежали вторая и третья детали, то при втором взвешивании сравним массы этих двух деталей; если весы при втором взвешивании были в равновесии, то бракованной является первая деталь, а если в неравновесии, то вторая или третья — та, которая оказалась более легкой.

5.7. Р е ш е н и е. Нужно взвесить остальные 20 монет; если весы покажут четное число грамм, то взятая монета — фальшивая, а если нечетное, то настоящая. Действительно, обозначим массу фальшивой монеты через a г. Если взятая монета фальшивая, то весы при взвешивании остальных монет покажут $10a + 10(a + 1)$ г, а значит, четное число граммов; если же она — настоящая, то весы покажут $11a + 9(a + 1) = 20a + 9$ г, а следовательно, нечетное число грамм. Но тогда обратные утверждения также справедливы.

5.9. 1) За два; 2) за два.

5.10. У к а з а н и е. Рассмотрите случаи $n = 3k, n = 3k + 1, n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$. В первом случае разбейте множество монет на три кучки, по k монет в каждой; во втором — на кучки из k, k и $k + 1$ монет; в третьем — на кучки из $k, k + 1$ и $k + 1$ монет.

5.11. У к а з а н и е. Обратите внимание, что здесь не требуется определить фальшивую монету — нужно только узнать, легче она или тяжелее настоящих.

5.12. Не всегда.

5.13. Р е ш е н и е. Занумеруем пакеты. Их массы обозначим соответственно через m_1, m_2, m_3, m_4 и m_5 .

За три взвешивания упорядочим три первых пакета и за одно — четвертый и пятый по массе. Пусть оказалось, что $m_1 < m_2 < m_3, m_4 < m_5$.

Сравним массы второго и четвертого пакетов. Пусть $m_2 < m_5$.

Так как $m_1 < m_2 < m_3, m_1 < m_2 < m_4$, то имеет смысл сравнить по массе третий и четвертый пакеты. Пусть $m_4 < m_3$. Тогда $m_1 < m_2 < m_4 < m_3$.

Осталось сравнить массы третьего и пятого пакетов. Если $m_5 < m_3$, то

$$m_1 < m_2 < m_4 < m_5 < m_3.$$

5.14. Р е ш е н и е. 77 колец разбиваем на три кучки: 27, 27 и 23 кольца.

1-е взвешивание. На чашки весов кладем две кучки по 27 колец и сразу выясняем, в какой из трех кучек находится более легкое кольцо. Если оно находится в кучке из 27 колец, то разбиваем их на три новые кучки по 9 колец; если же оно среди 23 колец, то разбиваем их на три кучки: 9, 9 и 5 колец.

2-е взвешивание. В том и другом случае на чашки весов кладем кучки по 9 колец и выясняем, в какой из трех кучек находится более легкое кольцо, 9 колец разбиваем на три кучки по 3 кольца; если же искомое кольцо находится среди 5 колец, то разбиваем их либо на 1, 1 и 3, либо на 2, 2 и 1.

3-е и 4-е взвешивания позволяют таким же образом найти искомое кольцо.

5.15. Р е ш е н и е. Пронумеруем кольца: 1, 2, 3, ..., 8.

1-е взвешивание. На одну чашку весов кладем, например, пару 1—2, а на другую — например, пару 3—5. Возможны два случая.

1) Равновесия нет. Значит, искомое кольцо среди колец 1, 2, 3, 4, а кольца 5, 6, 7, 8 заведомо нормального веса.

2-е взвешивание. На одной чашке по-прежнему пара 1—2, а на другую кладем «нормальную» пару 5—6. Если наступит равновесие, то кольца 1 и 2 нормального веса, а искомое кольцо 3 или 4. Если же равновесия не будет, то искомое кольцо 1 или 2. И в том, и в другом случае *3-е взвешивание* произойдет так: кладем на чашку весов «сомнительное» кольцо из пары 3—4 или пары 1—2 в зависимости от того, что показало 2-е взвешивание, а на другую чашку — одно из колец нормального веса. Если равновесия не будет, то «сомнительное» кольцо и есть искомое. Если же будет равновесие, то искомым будет другое кольцо из той пары, в которой находилось искомое кольцо.

2) Случай равновесия. Значит, кольца 1, 2, 3, 4 — нормального веса, искомое — одно из колец 5, 6, 7, 8.

2-е взвешивание. На одну чашку кладем «нормальную» пару, например 2—3, а на другую — «сомнительную», например 5—6, и дальше проводим исследование, аналогичное случаю первому.

5.16. У к а з а н и е. Составьте пару из алюминиевого и дюралевого кубиков и сравните вес этой пары с весом любой другой пары. Тогда результат каждого взвешивания сразу даст подсчет тех и других кубиков в испытываемой паре.

Р е ш е н и е. Положим на чашки весов по кубику.

1) Если равновесия нет, то кубики разнородны и пара из двух разнородных кубиков получена. Сравнивая вес ее с весом каждой из четырех оставшихся пар, мы с помощью всего пяти взвешиваний подсчитаем число кубиков каждого рода.

2) Допустим теперь, что взятые для *первого взвешивания* два кубика оказались однородны (случай равновесия). Составим пару из этих кубиков и сравним вес ее с весом какой-нибудь пары из оставшихся восемь кубиков (*второе взвешивание*). Допустим, что опять наступило равновесие. Значит, все четыре

кубика одного рода, но какого, пока неизвестно. Заменяем эту пару какой-либо новой парой из оставшихся шести кубиков (*третье взвешивание*). Допустим, что теперь новая пара перетянула. Значит, испытанные четыре кубика алюминиевые, а в новой паре либо оба кубика дюралевые, либо один дюралевый, а другой алюминиевый.

Чтобы выяснить состав новой пары, используем *четвертое взвешивание*: положим на две чашки весов по одному из кубиков этой пары. В случае равновесия — оба кубика дюралевые (всего, значит, из шести кубиков — четыре алюминиевых и два дюралевых). Отсутствие же равновесия укажет, какой кубик дюралевый и какой алюминиевый (всего в этом случае будет 5 алюминиевых и 1 дюралевый). Но теперь в том и другом случае уже можно составить пару из алюминиевого и дюралевого кубиков и сравнить с нею два оставшиеся пары (*пятое и шестое взвешивания*). (Очевидно, что в предлагаемом способе никакого значения не имеет, на каком по счету взвешивании нарушится равновесие.)

5.17. Пронумеруем кучки. Возьмем из кучки № 1 одно кольцо, из кучки № 2 два кольца и т. д., т. е. из кучки № 10 возьмем все 10 колец. Всего будет взято $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10 = 55$ колец. Положим на одну чашку весов все эти 55 колец, а на другую — 550 г. Равновесия, очевидно, не будет, так как среди 55 колец есть (хотя бы одно) кольцо весом в 9 г. Теперь берем гири в 1 г и последовательно кладем по одной такой гирьке на чашку с кольцами до тех пор, пока чашки не уравновесятся. Допустим, что равновесие наступило, когда на чашку с кольцами была положена четвертая гирька весом в 1 г: это будет означать, что среди 55 колец имеется четыре кольца весом в 9 г, а это в свою очередь будет означать, что кучка № 4 содержит кольца облегченного веса.

5.18. Р е ш е н и е. Сначала положим на две чашки весов по 13 монет, затем — по 11 из еще не бравшихся, затем — по 9 и т. д. до тех пор, пока одна из чашек не перевесит. Если такого не произойдет, то после седьмого взвешивания (когда на чашках весов будет по одной монете) останется всего одна монета, которая во взвешиваниях не участвовала. Она и является фальшивой.

Если при очередном взвешивании какая-то чашка перевесила, то фальшивая монета лежит в другой чашке. Общее количество монет в этой чашке обозначим $2k + 1$ (мы каждый раз кладем на одну чашку нечетное число монет), при этом мы уже использовали $7 - k$ взвешиваний, причем каждая монета взвешивалась не более одного раза. Поэтому осталось найти фальшивую монету в группе из $2k + 1$ монеты за k взвешиваний, взвешивая каждую монету не более одного раза. Для этого можно все монеты в группе, кроме одной, разбить на k пар и последовательно сравнивать веса монет каждой пары. Если при каком-то взвешивании равновесие нарушится, то более легкая монета и является фальшивой. В противном случае, фальшивая монета — оставшаяся без пары.

5.19. Р е ш е н и е. Разобьем монеты на пары и в каждой паре сравним веса монет. Мы использовали 34 взвешивания. Отделим 34 более легкие монеты из каждой пары и 34 более тяжелые. Очевидно, что самую легкую монету нужно

искать среди монет первой группы, а самую тяжелую — среди монет второй группы. В «легкой» группе будем класть на каждую чашку весов по одной монете в любом порядке, отбрасывая каждый раз ту монету, которая была тяжелее. После 33 взвешиваний мы отбросим 33 монеты; останется одна, самая легкая. Аналогично за 33 взвешивания мы определим самую тяжелую монету из «тяжелой» кучи. Таким образом, за 100 взвешиваний мы найдем самую легкую и самую тяжелую монеты.

Подумайте, можно ли обойтись меньшим числом взвешиваний.

5.20. Решение. Пусть (a, b) — упорядоченная пара (кортеж длины 2), где a, b — количество воды в 7- и 5-литровом сосудах соответственно.

Будем решать задачу с конца — начнем с того, что нам надо получить. Нужно, чтобы в 7-литровом сосуде было 6 л воды. Это можно получить, если отлить из 7-литрового 1 л, а 1 л можно отлить в 5-литровый, если там будет 4 л. 4 л можно получить, если от 7 л отлить 3 л, 3 же литра отольем, когда в 5-литровом будет 2 л, а 2 л получить просто: $7 - 5 = 2$. Остается восстановить решение в обратном порядке: $(0, 0) \rightarrow (7, 0) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (0, 2) \rightarrow (7, 2) \rightarrow (4, 5) \rightarrow (4, 0) \rightarrow (0, 4) \rightarrow (7, 4) \rightarrow (6, 5) \rightarrow (6, 0)$.

Наливая сначала воду в 5-литровый сосуд, получим другое, чуть более длинное решение: $(0, 0) \rightarrow (0, 5) \rightarrow (5, 0) \rightarrow (5, 5) \rightarrow (7, 3) \rightarrow (0, 3) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (3, 5) \rightarrow (7, 1) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 5) \rightarrow (6, 0)$.

5.21. Пусть a, b — количество воды в 8- и 5-литровом сосудах соответственно, тогда: $(0, 0) \rightarrow (0, 5) \rightarrow (5, 0) \rightarrow (5, 5) \rightarrow (8, 2) \rightarrow (0, 2) \rightarrow (7, 0)$.

5.22. Решение задачи задается числовым выражением $3 + 3 - 5$.

5.23. Пусть a, b — количество воды в 12- и 7-литровом ведрах соответственно, тогда: $(0, 0) \rightarrow (12, 0) \rightarrow (5, 7) \rightarrow (5, 0) \rightarrow (0, 5) \rightarrow (10, 7) \rightarrow (10, 0) \rightarrow (3, 7) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (0, 3) \rightarrow (12, 3) \rightarrow (8, 7) \rightarrow (8, 0) \rightarrow (1, 7) \rightarrow (1, 0)$.

5.24. Решение задачи задается числовым выражением $9 - 4 - 4 + 9 - 5$.

5.25. Решение задачи задается числовым выражением $7 - 3 + 7 - 3 - 3$.

5.26. Указания. Обозначим начальное количество молока во фляге через x л. Из того факта, что $x \geq 10$ следует, что разностью $x - 10$ пользоваться можно, а разностью $x - 11$ — нельзя.

Пусть (a, b, c) — количество молока во фляге, ведре и бидоне соответственно, тогда: $(x, 0, 0) \rightarrow (x - 5, 0, 5) \rightarrow (x - 5, 5, 0) \rightarrow (x - 10, 5, 5) \rightarrow (x - 10, 9, 1) \rightarrow (x - 1, 0, 1) \rightarrow (x - 1, 1, 0) \rightarrow (x - 6, 1, 5) \rightarrow (x - 1, 6, 0)$.

5.27. $(x, 0, 0) \rightarrow (x - 9, 9, 0) \rightarrow (x - 4, 4, 5) \rightarrow (x - 4, 0, 4) \rightarrow (x - 13, 9, 4) \rightarrow (x - 13, 8, 5) \rightarrow (x - 8, 8, 0)$.

5.28. Решение задачи задается числовым выражением $9 - 5 + 9 - 5 - 5$.

5.29. Последовательность переливаний можно задать или числовым выражением $5 - (17 - 5 - 5 - 5) + 5 + 5$, или непосредственно в виде следующей цепочки: $(x, 0, 0) \rightarrow (x - 5, 0, 5) \rightarrow (x - 5, 5, 0) \rightarrow (x - 10, 5, 5) \rightarrow (x - 10, 10, 0) \rightarrow (x - 15, 10, 5) \rightarrow (x - 10, 15, 0) \rightarrow (x - 20, 15, 5) \rightarrow (x - 20, 17, 3) \rightarrow (x - 3, 0, 3) \rightarrow (x - 3, 3, 0) \rightarrow (x - 8, 3, 5) \rightarrow (x - 8, 8, 0) \rightarrow (x - 13, 8, 5) \rightarrow (x - 13, 13, 0)$.

5.31. Решение. Трижды наполняем 3-литровый сосуд и выливаем его содержимое в 7-литровый. При третьем переливании в 3-литровом остаются

2 л. Выливаем все молоко из 7-литрового в 10-литровый, а 2 л из 3-литрового переливаем в 7-литровый. Наполняем 3-литровый и переливаем его содержимое в 7-литровый. Всего понадобится 10 переливаний.

Если сначала наполнить 7-литровый и из него отливать по 3 л в 10-литровый и т. д., тогда разлить молоко удастся за девять переливаний. Но чтобы получить 2 л, понадобится еще одно переливание.

5.33. $(18, 0, 0, 0) \rightarrow (14, 0, 0, 4) \rightarrow (18, 4, 0, 0) \rightarrow (10, 4, 0, 4) \rightarrow (10, 4, 4, 0) \rightarrow (6, 4, 4, 4) \rightarrow (6, 7, 4, 1) \rightarrow (13, 0, 4, 1) \rightarrow (13, 1, 4, 4) \rightarrow (9, 1, 4, 4) \rightarrow (9, 5, 4, 0) \rightarrow (5, 5, 4, 4) \rightarrow (5, 7, 4, 2) \rightarrow (5, 7, 6, 0) \rightarrow (12, 0, 6, 0) \rightarrow (8, 0, 6, 4) \rightarrow (8, 4, 6, 0) \rightarrow (4, 4, 6, 4) \rightarrow (4, 7, 6, 1) \rightarrow (11, 0, 6, 1) \rightarrow (11, 1, 6, 0) \rightarrow (7, 1, 6, 4) \rightarrow (7, 5, 6, 0) \rightarrow (3, 5, 6, 4) \rightarrow (3, 7, 6, 2) \rightarrow (10, 0, 6, 2) \rightarrow (10, 2, 6, 0) \rightarrow (6, 2, 6, 4) \rightarrow (6, 6, 6, 0)$.

5.35. Эта задача имеет два решения, которые дадим в виде двух цепочек:

1) $(16, 0, 0) \rightarrow (10, 0, 6) \rightarrow (0, 10, 6) \rightarrow (6, 10, 6) \rightarrow (6, 4, 6) \rightarrow (12, 4, 0) \rightarrow (12, 0, 4) \rightarrow (1, 11, 4) \rightarrow (1, 9, 6) \rightarrow (7, 9, 0) \rightarrow (7, 3, 6) \rightarrow (13, 3, 0) \rightarrow (13, 0, 3) \rightarrow (2, 11, 3) \rightarrow (2, 8, 6) \rightarrow (8, 8, 0)$;

2) $(16, 0, 0) \rightarrow (10, 0, 6) \rightarrow (10, 6, 0) \rightarrow (4, 6, 6) \rightarrow (4, 11, 1) \rightarrow (15, 0, 1) \rightarrow (15, 1, 0) \rightarrow (9, 1, 6) \rightarrow (9, 7, 0) \rightarrow (3, 7, 6) \rightarrow (3, 11, 2) \rightarrow (14, 0, 2) \rightarrow (14, 2, 0) \rightarrow (8, 2, 6) \rightarrow (8, 8, 0)$.

5.36. $(42, 0, 0) \rightarrow (15, 27, 0) \rightarrow (15, 15, 12) \rightarrow (27, 15, 0) \rightarrow (27, 3, 12) \rightarrow (39, 3, 0) \rightarrow (39, 0, 3) \rightarrow (11, 27, 3) \rightarrow (12, 18, 12) \rightarrow (24, 18, 0) \rightarrow (24, 6, 12) \rightarrow (36, 6, 0) \rightarrow (36, 0, 6) \rightarrow (9, 27, 6) \rightarrow (9, 21, 12) \rightarrow (21, 21, 0)$;

или $(42, 0, 0) \rightarrow (30, 0, 12) \rightarrow (30, 12, 0) \rightarrow (18, 12, 12) \rightarrow (18, 24, 0) \rightarrow (6, 24, 12) \rightarrow (6, 27, 9) \rightarrow (33, 0, 9) \rightarrow (33, 9, 0) \rightarrow (21, 9, 12) \rightarrow (21, 21, 0)$.

5.37. $(4, 0, 6) \rightarrow (1, 3, 6) \rightarrow (1, 2, 7) \rightarrow (6, 2, 2) \rightarrow (5, 3, 2) \rightarrow (5, 0, 5)$;

или $(4, 0, 6) \rightarrow (4, 3, 3) \rightarrow (6, 1, 3) \rightarrow (2, 1, 7) \rightarrow (2, 3, 5) \rightarrow (5, 0, 5)$.

5.38. $(30, 0, 0, 0) \rightarrow (24, 0, 0, 6) \rightarrow (24, 6, 0, 0) \rightarrow (18, 6, 0, 6) \rightarrow (18, 12, 0, 0) \rightarrow (6, 12, 12, 0) \rightarrow (6, 14, 10, 0) \rightarrow (6, 8, 10, 6) \rightarrow (12, 8, 10, 0) \rightarrow (12, 2, 10, 6) \rightarrow (18, 2, 10, 0) \rightarrow (18, 0, 10, 2) \rightarrow (4, 14, 10, 2) \rightarrow (4, 10, 10, 6) \rightarrow (10, 10, 10, 0)$.

5.39. Семью способами. Р е ш е н и е. Найдем все представления числа 10 в виде суммы слагаемых, каждое из которых равно 2 или 3: $10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2 + 2$.

В последней сумме порядок слагаемых существен; проверьте самостоятельно, что представить 10 в виде суммы четырех слагаемых, равных 3, 3, 2 и 2, с учетом их порядка, можно шестью способами.

ЛИТЕРАТУРА

- Бабинская И. Л.* Задачи математических олимпиад. — М.: Наука, 1975.
- Байиш Ж. К.* Логические задачи. — М.: Мир, 1983.
- Беррондо М.* Занимательные задачи. — М.: Мир, 1983.
- Визам Б., Герцег Я.* Игра и логика. 85 логических задач. — М.: Мир, 1975.
- Визам Б., Герцег Я.* Многоцветная логика. 175 логических задач. — М.: Мир, 1978.
- Болховитинов В. Н., Колтовой Б. И., Лаговский И. К.* Твое свободное время. — М.: Детская литература, 1970.
- Бугаенко В. О.* Турниры им. М. В. Ломоносова. Конкурсы по математике. — М.: МЦНМО; ЧеРо, 1998.
- Володкович В. А.* Сборник логических задач. — М.: Дом педагогики, 1998.
- Галкин Е. И.* Нестандартные задачи по математике: задачи логического характера. — М.: Просвещение, 1996.
- Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971.
- Гарднер М.* Математические досуги. — М.: Мир, 1972.
- Гарднер М.* Есть идея! — М.: Мир, 1982.
- Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. — Киров: АСА, 1994.
- Германович П. Ю.* Сборник задач по математике на сообразительность. — М.: Учпедгиз, 1960.
- Доморяд А. П.* Математические игры и развлечения. — М.: Учпедгиз, 1961.
- Кузьмин О. В.* Введение в перечислительную комбинаторику. — М.: Дрофа, 2005.
- Кэрролл Л.* История с узелками. — М.: Мир, 1973.
- Лихтарников Л. М.* Логические задачи. Элементы математической логики. — Л.: Изд-во ЛГПИ, 1977.
- Лихтарников Л. М.* Задачи мудрецов. — М.: Просвещение, 1996.
- Лихтарников Л. М.* Занимательные логические задачи. — СПб.: Лань; МИК, 1997.
- Смаллиан Р. М.* Как же называется эта книга? — М.: Мир, 1981.
- Смаллиан Р. М.* Принцесса или тигр? — М.: Мир, 1985.
- Смаллиан Р. М.* Алиса в стране смекалки. — М.: Мир, 1987.
- Шевченко В. Е.* Некоторые способы решения логических задач. — Киев: Вища школа, 1979.
- Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф.* За страницами учебника математики: Математический анализ. Теория вероятностей. Старинные и занимательные задачи. — М.: Просвещение, 1997.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	3
Глава 1. КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ	7
§ 1.1. Конечные множества и операции над ними	7
§ 1.2. Круги Эйлера	15
§ 1.3. Упорядоченные множества	21
Глава 2. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И СООТВЕТСТВИЯ	29
§ 2.1. Соответствия	29
§ 2.2. Бинарные отношения	38
§ 2.3. Логические таблицы	48
§ 2.4. Графы	63
Глава 3. ВЫСКАЗЫВАНИЯ	73
§ 3.1. Истинные и ложные утверждения	73
§ 3.2. Правдолюбцы и лжецы	84
Глава 4. ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ	91
§ 4.1. Турнирные задачи	91
§ 4.2. Стратегии	104
§ 4.3. Логические задачи на индукцию (задачи о колпаках)	119
Глава 5. ВЫДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА ИЛИ ПОДМНОЖЕСТВА	125
§ 5.1. Взвешивания	125
§ 5.2. Переливания	134
Ответы, указания, решения	143
Литература	188

Учебное издание

Кузьмин Олег Викторович

**КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

Учебное пособие

Зав. редакцией *Г. Н. Хромова*

Редактор *Т. С. Зельдман*

Оформление *П. А. Широкова*

Художественный редактор *А. А. Шувалова*

Технический редактор *С. А. Толмачева*

Компьютерная верстка *Е. В. Агуреева, А. В. Маркин*

Корректор *Е. Е. Никулина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 77.99.03.953.Д.004992.08.05 от 16.08.2005.

Подписано к печати 01.11.05. Формат 60х90¹/16.

Бумага типографская. Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 12,0 Тираж 3 000 экз. Заказ № 2306.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сушеvский вал, 49.

**Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги
просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»:
127018, Москва, а/я 79. Тел.: (095) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru**

**По вопросам приобретения продукции
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:**

127018, Москва, Сушеvский вал, 49.

Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».

109172, Москва, Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.

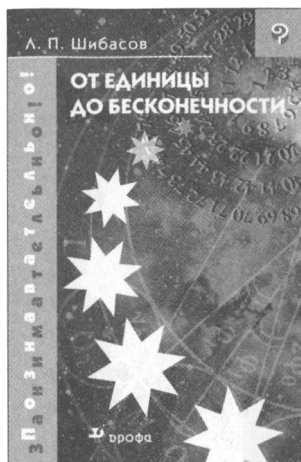
Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Сеть магазинов «Переплетные птицы».

Тел.: (095) 912-45-76.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ОАО «Тульская типография».
300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.

ПОЗНАВАТЕЛЬНО! ЗАНИМАТЕЛЬНО!



Л. П. Шибасов.

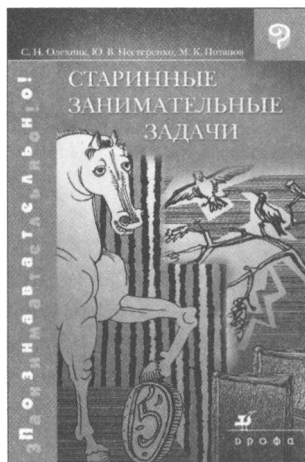
«ОТ ЕДИНИЦЫ ДО БЕСКОНЕЧНОСТИ».

В книге рассмотрены интересные последовательности, возникающие в теории чисел, алгебре, геометрии и математическом анализе; описаны их свойства; представлены исторические сведения и упражнения, к которым предлагаются ответы и решения.

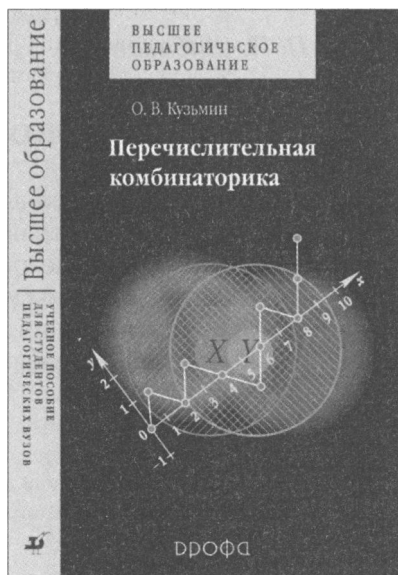
С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко,
М. К. Потапов.

«СТАРИННЫЕ ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ».

В книге собраны задачи из старинных российских летописей X–XVII вв., из знаменитой «Арифметики, сиречь науки числительной...» (1703 г.) и из других книг, изданных в XVIII в., а также интересные сведения по истории математики.



Книги будут полезны студентам педагогических вузов, а также для факультативных занятий в старшей школе.



О. В. Кузьмин.

«ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНАЯ КОМБИНАТОРИКА».

Учебное пособие.

В учебном пособии изложены основные понятия и методы перечислительной комбинаторики (множества, операции над ними; методы: рекуррентных соотношений, производящих функций, траекторий). Для каждой темы помимо теоретического материала представлены примеры с решениями, а также задачи и упражнения для самостоятельного решения с ответами.

Большое внимание уделяется вопросам применения комбинаторики в кибернетике, физике, химии, биологии, геометрии, теории информации, теории кодирования и т. д.

Пособие предназначено для студентов математических специальностей педагогических вузов и других высших учебных заведений, а также может быть полезно учащимся математических классов и учителям.

В пособии изложены:

- основные понятия и сведения теории конечных множеств с элементами теории бинарных отношений и соответствий;
- теоретические основы решения задач логического характера;
- примеры решений, а также задачи и упражнения по каждой теме.

Пособие рассчитано на студентов математических специальностей педагогических вузов и на старшеклассников, изучающих дополнительные разделы математики на факультативных занятиях, а также самостоятельно.

ISBN 5-7107-8579-2



ДРОФА

